

兒童「相似性」概念發展之研究——長方形

林碧珍

國立新竹師範學院

第一章 緒論

一·研究動機與目的

日常生活中我們所接觸到的平面圖片，大部分是原物的縮圖或放大圖。例如：人、風景、交通工具、建築物……等，都是原物的縮圖或放大圖。細胞、微生物、小動物和電影畫面等都是原物的放大圖，而在拍攝或製造原物的縮圖或放大圖時，往往要照一定的比例加以縮小或放大，如此才不會喪失原物形象的特性。縮圖或放大圖與原物實際上是兩個相似的圖形，因而具有相似的性質：對應邊成比例，對應角相等。

平面上兩個圖形的「相似性」概念為現行國小數學教材第十二冊的單元內容。由研究者在本院輔導區輔導教學的經驗，發現此為小學教師深感困擾的單元之一。板橋教師研習會（民76）研究報告也指出兒童縮圖的作法不知如何著手，因此有必要去探究是教材的不適切性或是兒童認知發展未成熟？本研究從認知的觀點，探討兒童在學習某一概念時舊經驗的基礎為何？能瞭解兒童內在認知歷程的轉變。

Fuson（1978）指出有理數的瞭解是建立在「相似性」上，而比和比值是代數上的重要題材，卻又是兒童學習困難的題材之一（板橋教師研習會，民76），因此為提高兒童有關比例推理能力和培養兒童「相似性」概念的應用能力，有必要去探究兒童「相似性」概念的發展。在探討兒童相似性概念發展之前，有項不可忽視的問題是：雖然兒童在日常生活中已接觸到照片或微生物的放大或縮小，或許越多這種經驗的兒童，越具有較完備的「相似性」之前置經驗。畢竟數學的術語「相似性」正式的定義是從教室中學習的，但相關的概念是可以從日常生活的經驗中獲得的。事實上，兒童雖具有相似性的相關概念，但很可能不了解數學上所謂的「相似性」的意義是什麼？兒童生活中常聽到的或自以為知道的「相似」，是用來描述兩個事物所具有的共同特徵和屬性極為接近，而不是數學上的「相似」，日常生活使用的「相似」是模糊的，數學上的「相似」是明確的。因此為了探討兒童未進入教室學習幾何的「相似性」定義之前，兒童已具備了那些相關概念或前置經驗？首先必需以探索方式找出兒童用來描述兩個相似圖形的語彙是那些？這些語彙中何者較不失數學上的「相似性」定

義？

Chazen 等人 (1988) 提出「形狀相同」是幾何上「相似性」的直觀瞭解，換言之，「形狀相同」是兒童所能瞭解的語彙，隨著經驗的成長，而有認知歷程的轉變。因為兒童形狀相同的概念並非一正統概念 (classical concept)，而是一個原型概念 (prototype concept)；也就是兒童判斷兩個圖形形狀是否相同？是依據他所經歷過的最佳事例，並依據現況與最佳事例的接近程度決定的，但不一定有核心屬性 (core attribute)，所以它是含混的，隨著經驗的成長，兒童的原型概念會有轉弱，某些核心屬性可能形成。因此在形狀的要求上則日趨嚴苛，趨向於「相似性」的標準定義 (Carey 1982)，兒童未進入學校學習「相似性」定義之前，由於生活經驗的不同，可能有認知上的差異，因此本研究擬建立兒童「相似性」的概念發展特徵，具體言之，本研究之目的為：

- (一) 探討兒童描述兩個相似圖形常用的語彙及這些語彙的使用。
- (二) 建立兒童「相似性」概念發展的特徵。

二．待答問題

根據上述研究的目的，本研究擬探討下列問題：

1. 兒童描述兩個相似圖形使用的語彙有那些？
2. 瞭解兒童如何使用這些語彙？描述圖形的那些組成元素？那些屬性？並能了解兒童使用的語言和解題策略。
3. 分析兒童辨認或繪兩個相似圖形的認知結構。
4. 瞭解兒童辨識兩個長方形「形狀相同」的發展特徵。

第二章 文獻探討

第一節 日常語言和幾何術語

語言在幾何思考發展中扮演極重要的角色，通常一個詞彙是幾何上的術語也是日常生活中的用語，諸如：「相似」。兒童生活中可聽到或用到：「兩個圖案看起來很相似」，這是從日常學得的日常用語，通常是用來描述兩個物件從顏色、大小、形狀、方向、圖案等屬性衡量具備有多少的共同性或接近的程度？事實上從兒童週遭的環境，有些教育性的兒童讀物關於形狀一樣，意指兩個圖形大小相等而且形狀一樣，而形狀相似意指所有四邊形或所有三角形或所有圓形均為形狀相似，或許這些語言在兒童生活已經是常常的使用了。

「相似」也是幾何術語，在中學「相似性」是一個重要的幾何概念，在幾何課程中相似關係僅次於全等關係。一般而言，在幾何上經過數學化的過程就

受制於幾何定義了，「相似」在幾何上的定義是假如存在一個相似變換 S ，使得圖形 F_1 ， F_2 具有 $S(F_1)=F_2$ ，則稱圖 F_1 相似於圖 F_2 ，(Vollrath, 1977)，換言之：兩個多邊形相似的定義是若兩個圖形對應角相等，對應邊成比例，兩個相似的圖形，從直觀的解釋是它們的形狀相同。(Chazan et al. 1988).

在幾何教學上，假如幾何名稱能與生活用語中獲得概念的心像相結合，則很容易依據兒童的生活經驗引導到幾何上的定義。反之，則亦可能阻礙幾何概念的獲得。Chazan 等人 (1988) 提到兒童從日常生活體驗到的「相似」若進入到學校學習「相似」會造成學習上的困難，理由有二：一是兒童錯誤的概念大都起源於日常的常識和經驗，在幾何上的「相似」或「相似性」就比日常生活用起來困難，因為在日常生活中，所有三角形都相似，因為都有三個角和三個邊，但在幾何上所有三角形並不都是相似。另一個理由是教科書對相似性的定義不夠明確。”相似性”是兩個圖形之間存在的一種關係，即二個圖形具有相同的形狀，但不需要兩個圖形的大小一樣，在此何謂形狀一樣？如所有三角形都是相同的形狀，所以是相似嗎？

「相似性」是幾何上重要的題材之一，對於實測、比例推理、畫圖形的大小，它是一個基礎。Lappan 和 Even(1988) 提到學生不了解相似性的概念可能的原因是缺乏學習；Chazan 等人 (1988) 提到學生處理相似性問題最困難的是比值和比例，當給三角形的二邊長去畫出放大後的三角形，學生通常以相等的邊去畫出放大的三角形，這些觀念似乎與做比值放大問題的加法策略有關 (Piaget ; Inhelder & Szeminska 1960; Karplus et al. 1984 ; Hart 1981)

目前最常用於探究內在心理歷程方法是晤談法，是一種能夠讓學生自由地口語表達的研究方法，又由於兒童對幾何概念的解釋可反映出兒童的程度，所以透過晤談讓兒童回答是一個很重要的評估方式。皮亞傑對於幾何概念發展的研究認為晤談的技巧很重要，他了解到問太精細的問題會導致太狹窄的引導；問太模糊的問題會導致錯誤的回答，因此特別強調口語化的問話方式的重要。在他的研究中，有關相似性的問話方式對不同年齡的兒童問話方式就不同。例如給了一個大的長方形，問兒童是否和另一個比較小的長方形相似？或者問兒童這個長方形是不是和較大的長方形有相同的形狀 (Piaget & Inhelder 1956)。另外, Vollrath(1977) 也是以不同的問話方式探討兒童透過分類圖形的方式對相似性了解的差異，結果發現雖然在幾何中「相似」和「形狀相同」代表著相同的幾何關係，但兒童在分類時「相似」比較傾向於圖形的屬性；而「形狀相同」傾向於圖形整體的輪廓。並且提到兒童可能將「形狀相同」解釋為「圖形名稱相同」，很可能是受到教學的影響。因為教師常以「圖形名稱相同」來取代「相同形狀」問學生。事實上形狀相同的並非一正統概念而是一個原型概念 (Prototype concept)，即兒童判斷兩圖形形狀是否相同，是依據他所經歷過的

最佳事例而決定的，不一定有核心屬性，所以形狀相同是含糊的。

綜合上述，「相似」一詞是日常用語也是幾何上的名詞，日常用的相似是由兒童生活經驗中獲得，而幾何的相似定義是必需透過教室中學習獲得的，兩者之間的差異可能隨著兒童不同的經驗而有不同。因此有必要先去探討在兒童未學習幾何「相似性」定義之前，先去了解兒童生活語言中對「相似」的描述。究竟兩者連結的程度如何？爲了避免因兒童不了解或誤解問話時所用詞彙的意義，因而首先需找出兒童自發性地使用與「相似性」最相關的語彙有那些？然後再用兒童了解的這些語彙來作爲問話的語詞。能更進一步地了解這些語彙在幾何圖形上的描述爲何？

第二節 兒童的空間概念

一、皮亞傑理論

空間概念係包含圖形與空間；即與形狀、位置等有關的概念，幾何學源於與測量密切相關的歐氏幾何，其次於十七世紀的射影幾何，最後於十九世紀產生了拓樸學，而兒童的幾何學卻從拓樸空間概念開始經過一段時期後才逐漸發展射影幾何和歐氏幾何概念。根據皮亞傑仿畫幾何圖形之實驗結果：兒童空間概念之形成分爲三個階段。(一)拓樸幾何概念時期(約3至4歲)：係根據圖形是否封閉或開放而定。此階段兒童完全忽視有關邊長、角度、大小和邊數等歐氏幾何關係但是掌握基本的拓樸幾何概念；(二)過渡時期(約4至6歲)；(三)歐氏幾何概念時期(約6至8歲)。

從認知發展階段；兒童係由知覺空間轉化爲表徵空間與概念空間，例如：辨別幾何圖形屬於知覺方面的能力，仿畫擺在他面前的圖形則屬於建構表徵空間之能力。即知覺空間與表徵空間是不同的層次結構，表徵空間的建構乃是以感覺的經驗；知覺之基模爲其發展之基礎。皮氏也指出 10-12 歲的兒童不管其智力如何，均已具有在心理操作圖形形狀之能力。

兒童早已能直接看到他所能想到的相似圖形，不管具有不同長、寬、高的圖形是否有相似關係，因此勢必從實際圖形的了解來著手，大部分技術在完形(Gestalt)的理論中，藉著圖形及精確的構圖，然而看出那個圖形相似是一回事，能技巧的畫出相似圖形又是一回事，因此知覺問題決不會減少智力的心理層次。

知覺是根據感覺所獲得資料而作的心理反應，特別是在幾何圖形的辨識，受到知覺因素的主控，例如：從小正方形到大正方形的轉換被看成是一個整體，因爲正方形都是直角，四個邊等長，兩條對角線相等。或比較兩個長方形，角度都相等，即使是個圖形比另一個圖形較長些或較寬些，這些都是在知覺領域中存在著圖形之間的轉換。假定兒童能看出兩個圖形是相似，是不是也能依比

例畫出，這不僅是整個形狀而且保留了角度的不變和相關的邊長，這便需要進一步的心理發展呢！

皮亞傑 (Piaget & Inhelder 1956) 從心理發展的觀點觀察出平行線與角度相等的結構是一致的，從幾何的觀點，角度相等和平行線是相似形的特徵，因此他對相似性的研究的處理方式是把平行線的研究銜接到角的研究，由相似形的研究推到相似特徵的研究，看孩童如何在菱形的轉換中保留邊的平行，其次是檢視他們如何根據邊的平行看出三角形的相似，進而看出角度相等，因此爲了瞭解孩童如何發現相似三角形，首先要兒童畫出相似或不相似的三角形，其目的是可從邊的平行或角度的相等來看出相似，接著是給一些三角形由兒童依據角度或邊的比較推論出相似的概念，前者，兒童判別相似必須仰賴邊的平行而後者則需藉助將兩張圖片而使角度重疊，而不須仰賴邊的平行，結果發現：有關圖形的比較在階段 II 是以感覺來比較兩個圖形，但經常造成錯誤，缺乏用有系統的操作來比較，階段 III 開始用操作比較平行線、角度、長、寬、高的關係，開始以思考主導知覺，但仍不用尺的輔助。有關描繪圖形，在階段 II 忽視對應邊的平行，到了後期則開始注意邊的平行，大約 5 歲的孩童毫無困難的在另一個三角形的周圍描繪出一個較大的三角形，並且強調較大的三角形與原三角有相同的形狀或看起來很像或是一樣的，在此階段的孩子仍滿足於粗略的相似，也就是保握銳角三角形而繪出一個銳角三角形，根據鈍角三角形而繪出一個較大的鈍角三角形，仍然不關心角度或邊的平行問題，在階段 III 能建立邊的平行來作出相似圖，後期的兒童對於不同邊的長度能立刻猜想有一種比例關係的存在，在階段 IV 的孩童不再侷限於簡單的比例問題，而且能運用到各種情況上。

根據以上的探討兒童對圖形相似的判斷最早必定來自於直覺，這是一種格式塔能力，但經常容易導致錯誤的判斷，其次是以知覺的判斷；再發展到引導性的操弄圖形和自發性的主動操作圖形；最後再進展到以思考主導知覺；說明相似形與邊角之間的關係；然後達到了解相似性與對應邊長之間的關係。由認知發展觀點而言：就是由知覺空間發展到表徵空間至概念空間，皮氏有關兒童的空間概念發展主要是與年齡有關。相對於這個論點：有荷蘭學家 Dina Van Hiele-Geldof 和 Pierre M. Van Hiele 夫婦共同提出兒童幾何思考的發展 - Van Hiele 模式，是與教學的因素有關，認爲幾何思考的發展較不受兒童的年齡、成熟因素的影響。由於 Van Hiele 模式是最近十年來極受到有關研究兒童的幾何思考的研究者和課程發展者的矚目，茲以此模式產生的背景，幾何層次的描述和特徵略述如下：

二、Van Hiele 理論 (Crowley, 1987)

蘇俄的中學老師曾指出：許多高中生在幾何課程經常遭遇到失敗，特別是



形式的証明。自 1930 年至 1950 年許多數學教育家和心理學家著手去找出造成學生學習幾何困難的原因？Wirszup(1976)的報告中指出：「研究已顯示到幾何教學改進的需要，幾何課程需要根本的革新」(P.76)，因受到心理學家 J.Piagt 和教育家 P.M. Van Hiele 的鼓勵 1957 年 P.M. Van Hiele 曾在法國數學會議上發表論文，提出幾何的學習是從一個像完形 (gestal) 的視覺層次到複雜的分析和証明，當時極受到蘇俄數學教育們的喜愛之後，經常受到 A.M.Pyshhalo 的引用參考，Wirszup(1976)並公開談論這個模式，蘇俄的幾何課程便以此做為發展的理論基礎，直到 Fuys 等人 (1984)將原來的俄文轉譯成英文，從此更受到許多研究者及課程發展者的重視，在最近幾年美國也逐漸對此模式產生興趣，因此首先對 Van Hiele 模式加以探討：

(一)Van Hiele 模式的五個層次(levels)

第零層：視覺 (Visuality)

這個層次的兒童能透過圖形的整體輪廓辨認，能學習詞彙及辨認或再造出一個與指定的圖形相同的圖形，但不能利用圖形的性質或組成要素來分析。

第一層：分析 (Analysis)

這個層次的兒童能分析圖形的性質及組成要素，但不能解釋性質間的關係，也不能了解正式的定義。

第二層：非正式的演繹 (informal deduction)

這個層次的兒童能建立圖形間的關係及性質間的關係網路，能了解定義和解釋非正式的論證，但不能了解證明或定理的重要性，不能由不熟悉的前題建立證明的成立。

第三層：正式的演繹 (formal deduction)

這個層次的兒童可以了解到證明的重要性的了解「未定義名詞」「定理」「公理」的意義，能嚴密地証明及建立定理間的關係網路，能比較一個定理的不同証明方式。

第四層：嚴密 (rigor)

這個層次的兒童能在不同的幾何系統作比較，如在非歐幾何。

(二)Van Hiele 模式的特徵

Crowley 提出 Van Hiele 幾何思考的發展有一定的順序 (sequential)，都是從第 0 層依一定的順序進階到第四層，在從某一層次進階到高一層次受到教學比受到年齡的因素大，若適當的安排教學可提昇 (advancement) 學童的幾何概念，但是任何的教學不可能使兒童從某一層次跳過高一層次而到達更高的層次，假如兒童是在第 0 層，則教師必需安排關於第 0 層的學習教材讓兒童學習，否則學習動機就不會發生，更談不上會有學習的進步，即所謂師生錯誤的

搭配 (Mismatch)。此模式的每一層次有每一層次的語言符號和關係系統 (P.M Van Hiele 1984a, P. 246)，例如：一個正方形有幾個名稱，可以命名為長方形或是平行四邊形。在某一層次的性質是內在的 (intrinsic)，但可能到下一層次就變成是外在的 (extrinsic) 例如：從第 0 層透過外觀辨識圖形到第一層則是進行組成要素的分析了。

(三) 對 Van Hiele 模式的批判

Fuys 等人 (1988) 提出：「根據有經驗的老師提到 Van Hiele 模式確實很關心學生在幾何學習所遭遇的困難，老師們也都相信，中學的幾何課程應涉及到較高深的題材，但是中學生在較低層次的幾何還沒有足夠的經驗」，Pyshkalo (1968) 和 Wirszup (1976) 認為蘇俄的五年級學生只有 10-15% 達到第一層；Fuys 等人 (1988) 的研究發現美國六年級學生有 19% 仍停留在第 0 層；學生雖然正式學過幾何課程，但仍有 40% 達不到第二層 (Burger & Shaughnessy 1986; Suydam 1985; Usiskin 1982)。有許多的研究者對此模式探討它的教學效果 (Fuys; Gedds & Tischler 1988)。Burger & Shaughnessy (1986) 提出 Van Hiele 模式的特徵。Mayberry (1983); Gutierrez & Jaime (1988); Nasser (1989) 以不同的題材探討各個層次學生的特徵，大體上而言，有關幾何概念的發展研究，大都以 Van Hiele 幾何思考發展模式為基礎，有些研究者支持 Van Hiele 理論，但有些研究者 (Clements 1991) 則對 Van Hiele 理論提出批判：

1. Van Hiele 理論的正確性如何？

許多研究者証實從小學生到大學生的幾何概念發展，Van Hiele 模式確實很有用 (Burger & Shaughnessy 1986; Fuys, Geddes & Tischler, 1988, Hoffer 1983; Wirszup 1976)。Usiskin (1982) 發現 75% 的中學生適合於 Van Hiele 模式。許多研究者 (Hoffer 1983; Burger & Shaughnessy 1986; Fuys et al. 1988; Nasser 1989) 以 Van Hiele 模式對「全等」概念的各層次描述是：

第零層：僅依外觀辨認全等的形狀，方向是相關屬性，不能了解兩個全等圖形分別對應的元素。

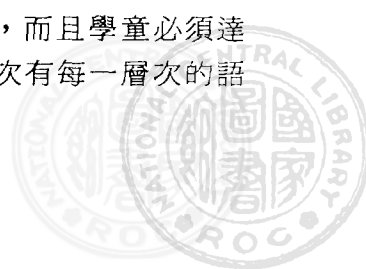
第一層：能透過測量或疊合方式去辨識兩個形狀的全等，方向不是相關的屬性，能分析兩個三角形全等的性質。

第二層：能了解並建立全等三角形的充分條件，但不會試著去證明兩個三角形的全等。

第三層：以合乎邏輯去證明兩個三角形全等，並嘗試去使用非正式的證明方式。

第四層：能了解到嚴密證明的重要，並能寫出證明。

Nasser (1989) 並且証實這些層次的描述對兒童是適合的，而且學童必須達成較低層次的幾何概念，才能進階到較高的層次。在每一層次有每一層次的語



言 (Burger & Shaughnessy 1986; Fuys et al.1988; Mayberry1983) , 例如：長方形對不同層次所含的意義就不同，Crowley (1987)說明各層次的兒童辨認長方形的理由是：

第零層：「它看起來像 1」或是「它看起來像門」（基於視覺而來）。

第一層：「它有四個邊，是封閉的，有兩個長邊，兩個短邊，兩對邊平行，有四個直角（能用圖形的性質去分析，但嫌多餘）。

第二層：「這是一個直角的平行四邊形」（以最少條件去解釋，如兩對邊平行就是多餘的）。

第三層：「如果我知道這是一個平行四邊形，有一個直角，則可證明此圖形是一個矩形。（試著以推理方式去說明這個事實）。

2. 各層次間是不連續的嗎？

對於這個問題有不一致的結果，有些研究者提出層次之間是不連續的 (Hoffer 1983; Wirszup 1976) ，有些研究者卻指出從某一層次轉變到另一層次是很難畫分的，尤其是第一層和第二層 (Burger & Shaughnessy 1986; Fuys et al. 1988; Usiskin, 1982)

3. 兒童對不同的題材具有相同的層次嗎？

這個問題和這些層次之間是否為不連續的問題很相關，由證據顯示非常複雜，Mayberry (1983) 認為職前教師對不同的概念就有不同的層次，Gutierrez 和 Jaime (1988) 以平面幾何、空間幾何和測量為研究題材，發現職前教師所達到的層次是相關的。Denis (1987)；Mason (1989) 分別發現中學生和中學教師對不同題材就有不同的層次。

4. 各層次間是有階層性嗎？(Hierarchy)

許多研究者均支持 Van Hiele 層次是有階層性的假設 (Burger & Shaughnessy 1986; Fuys et al. 1988; Usiskin 1982; Mayberry 1983; Denis 1987) 。証實發展這些層次受到教學影響比受到年齡因素大 (Crowley, 1987)

5. 幾何概念發展最基本的層次是什麼？

Usiskin (1982) 提出有 34% 的中學生未達到視覺層次，26% 的學生在開學時是在第 0 層，而在學期結束時仍維持在第 0 層，Fuys 等人 (1988) 認為兒童在某一層次必需對這一層次顯示出一致性的行為，但在第 0 層的兒童卻沒有顯示第 0 層的特徵。如：不會命名形狀。因此有更基本的層次存在。Battista 和 Clements (1987); Senk (1989) 有證據顯示應當有比視覺層次更基本的層次存在，那就是第 0 層的前期 (pre-level 0) ，在此層次的兒童能感覺到幾何的形狀，但沒有感覺的活動 (缺乏視覺心像) ，不能辨別同類形狀區別，如：不能區別正方形和長方形的不同，但可以區別正方形和圓形的不同。

綜合上述：Van Hiele 模式是許多研究者從事幾何概念發展研究作為理論

基礎的依據，大部份研究者均支持 Van Hiele 模式的五個層次的合理性：是從直觀的辨別到分析再進階到抽象的證明階段，它可以合理的解釋兒童幾何概念發展的階層，也可以評估學生的幾何能力。幾何概念的發展受到教學影響遠超過年齡因素。有些研究者認為有些兒童的幾何概念能維持在比視覺的辨認更基本的層次，而且對不同幾何概念所屬的層次亦不同，有些研究者以「全等」概念為題材證實了 Van Hiele 模式的適用性，可以描述出各個層次的兒童所具有的特徵。目前以 Van Hiele 為理論基礎的「相似性」概念研究尚付闕如，「全等」是「相似」的特例，在支持 Van Hiele 模式五個層次的合理性的假設下，似乎亦能發展出「相似性」概念的思考層次。

第三節 國內外有關兒童空間概念的實徵性研究

有關相似圖形在認知方面的研究大部份是中學階段，中學以下的階段，這方面的研究方向大都是在探討學生學過相似性的幾何課程後，所學得的概念是什麼？有那些學習的困難（Lappen & Even 19880；Chazan 1988；Vollrath 1977）。Vollrath(1977)以圖形分類來檢驗兒童相似性的了解，並且提到分類的方法最容易使兒童抓住概念的特徵，結果發現：兒童將兩個長方形是否歸為同類時，比較能注意到兩個長方形是否等寬，兩個圖形邊長的比值關係對兒童則毫無意義。大部份的兒童能分出長方形和正方形為兩堆，認為這兩堆是不同的形狀，而年級愈高的兒童更能辨認出各種長方形的不同，通常是依據寬度是否相同作為分類的準則。沒有一個兒童能依據圖形的小方格作為分類的依據。Kerr (1981) 從 1977-78 美國全國教育進展評估 (NAEP) 分析，有 94% 的 13 歲兒童能辨識兩個相似的圖形，但發現大部份的學生不了解這兩個相似圖形的性質，也不會將相似性應用到比例問題上。國內蘇英奇 (民 61, 民 64) 對國小學生圖形概念的調查與分析。結果發現：學童對相同和相似語詞反應的階段是：

兩個圖形相同

第一階段：全等且需同位置，乃低年級的普遍現象。

第二階段：雖可變換位置，但仍需全等。以圖形輪廓為辨識憑藉。

第三階段：以邊角關係為依據，亦即圖形的認識已有某種程度的概念化。

兩圖形相似

第一階段：由直觀印象而來，圖形的部分要素雖無影響，但未注意彼此的共同因素。

第二階段：注意圖形內某些要素的共同性，但仍未把握邊角構成圖形的性質。

第三階段：注意邊角構成的圖形性質，掌握圖形特性，然後再予概念化。



另外兒童用來辨別兩個圖形是否相同或相似的依據是：

三角形：是否為等腰、頂角是否一樣、底邊的大小。

長方形：對邊是否平行、鄰邊不等長、對邊相等、有四個直角。

菱形：對邊平行、四邊等長、同位置、銳角或鈍角。

綜合以上的研究結果得到，分類圖形的方法是可用來評估兒童相似性的了解，圖形的顏色、形狀、大小是兒童常用來作為分類的依據，在圖形中雖提供有助於辨識長度的條件，但兒童由於未達到具有相似圖形邊長的關係的認知，因此無法產生任何的作用。通常兒童辨識相似的圖形的判斷依據是先由直覺印象而來，再進展到分析圖形的要素，最後掌握的是圖形特性，然後再予概念化。若以皮亞傑認知發展觀點而言；就是由知覺空間發展到表徵空間至概念空間，若以 Van Hiele 理論就是由視覺辨認發展到分析階段乃至抽象階段。

辨識兩個圖形是否相似之前，必須對單一圖形有所認識，不管是在直觀辨別的階段或在分析的階段，因此有必要對平面圖形的研究文獻加以探討：

(1) 辨別圖形比造形或畫圖形容易：

皮亞傑提到兒童辨別圖形和畫出圖形是兩回事，(Piaget & Inhelder 1956), 因為畫圖不只是需要知覺的判斷，還需要別的能力，Fuson 和 Murray (1978) 指出 3 歲半的兒童能認識圓形、正方形、三角形、菱形(依發展順序)，能用牙籤做出一個正方形，但到 6 歲半有些兒童能圍出一個菱形。一般到了 5 歲兒童才能成功的畫出三角形和菱形，6 歲的兒童不到 20% 能正確的畫出三角形，兒童用竹籤比畫圖形容易的理由是因為竹籤可以使用嘗試錯誤的策略而得到結果。

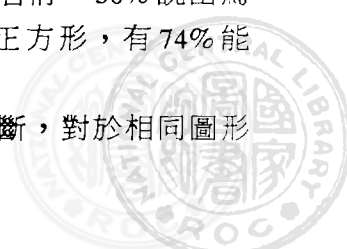
(2) 各種圖形的辨認：

Greenes (1979) 發現當圖形的位置改變時，就改變此圖形的形狀和大小，例如：兒童即認為它不是一個三角形，因為基準線必需是水平的。Kerslake (1979) 也發現到「◇」兒童仍認為它是正方形，各年齡的百分比為 54%(5 歲)，80%(7 歲)。另外「▽」兒童認為它是一個三角形的百分比為 38%(5 歲)、65%(8 歲)、67%(10 歲)。Ward(1979) 以 5 到 10 歲兒童為對象，發現各圖形兒童認為是一個長方形的百分比為：85%，89%，22%，5%，87%，Apu(1981a) 以 11 歲兒童為對象，發現各圖形兒童認為是個長方形的百分比為 60%，84%，91%，78%，8%，25%，15%，兒童認為的長方形，照理上應當是正方形的 2 倍。

(3) 圖形的命名：

APU(1980a,1980b) 發現 15 歲兒童有 85% 能說出正方形的名稱，30% 說出鳶形、菱形和梯形，Ward(1979) 發現 10 歲兒童有 95% 能說出正方形，有 74% 能說出平行四邊形，76% 能說出三角形。

綜合上述文獻，圖形擺放的位置影響到兒童對圖形的判斷，對於相同圖形



的判斷受到位置的影響。倘若位置變動即使是全等，多數兒童仍予否認，此種現象在台灣的兒童至四年級始見擺脫，而日本的兒童則至三年級擺脫(蘇英奇民 64)。兒童辨別正方形和長方形沒有困難，辨識菱形、平行四邊形、長方形較為困難。

第三章 研究設計與實施

第一節 研究樣本

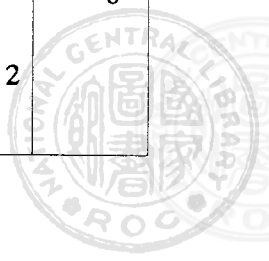
研究之第一階段是探索性質，晤談的目是瞭解兒童對兩個圖形的描述或操弄，所以樣本以兒童善於表達為原則，晤談的對象為新竹市西門國小一至六年級各取2名，共12位。

第二、三階段的樣本性質是依據第一階段的結果而來的，發現樣本中一、二年級學生的反應沒有顯著的差異，而一年級由於是小學的啓蒙階段，樣本中的三年級與四年級則有顯著不同的反應，而三年級與低年級學生的反應雖有差異但不顯著，高年級中由於六年級下學期有一單元是與相似相關的教材，爲了了解教學之前、教學之後兒童對形狀相同、相似、相像的概念的差異，所以在第二、第三階段的樣本，晤談對象低、中、高年級分別是一、四、六年級，第二階段先依市區、市郊、鄉村及偏遠地區選取樣本學校，第三階段的取樣學校為新竹市港南國小和新竹國小。今將三個階段的學校樣本和學生樣本整理成表 3-1。



表 3-1：晤談學校樣本與學生樣本一覽表

| 實施階段 | 縣 市 | 學校名稱 | 年 級 | 男 | 女 | 合 計 | | |
|------|-----|------|------|---|---|-----|----|----|
| 第一階段 | 新竹市 | 西門國小 | 一 | 1 | 1 | 12 | 12 | |
| | | | 二 | 1 | 1 | | | |
| | | | 三 | 1 | 1 | | | |
| | | | 四 | 1 | 1 | | | |
| | | | 五 | 1 | 1 | | | |
| | | | 六 | 1 | 1 | | | |
| 第二階段 | 新竹市 | 內湖國小 | 一 | 3 | 1 | 4 | 11 | |
| | | | 四 | 3 | 2 | | | |
| | | | 六 | 1 | 1 | | | |
| | | 師院實小 | 一 | 2 | 2 | 4 | | 6 |
| | | | 六 | 1 | 1 | | | |
| | | | 六 | 1 | 1 | | | |
| | 苗栗縣 | 建中國小 | 一 | 1 | 1 | 2 | 6 | |
| | | | 四 | 1 | 1 | | | |
| | | | 六 | 1 | 1 | | | |
| | 台北縣 | 石碇國小 | 一 | 2 | 2 | 4 | | 11 |
| | | | 四 | 2 | 1 | | | |
| | | | 六 | 2 | 2 | | | |
| 第三階段 | 新 | 港南國小 | 四 | 1 | 1 | 2 | 4 | |
| | | | 六 | 1 | 1 | | | |
| | 竹 | 市 | 新竹國小 | 六 | 2 | 0 | | |
| | | | | 六 | 2 | 0 | | |



第二節 研究工具的編製

本研究採用晤談的方法，分三個階段進行，每個階段包含三個活動，茲將編製的過程和設計的架構說明如下：

(一) 晤談工具

1. 幾何圖卡：

前二個階段探討兒童在描述兩個相似圖形時所用的相關語彙的意義，第三個階段是更深入地探討兒童辨識兩個長方形「形狀相同」的概念在認知上的差異。基於以下四個理由，本研究之三個階段實施均分別進行三個活動：一是幾何圖卡辨識活動，二是辨識圖形活動，三是繪圖活動。(1)由於幾何圖卡的辨識是具體的，兒童能自由地觀察、操作、疊合、測量、比對，故而難以辨別出兒童的心智操作能力。(2)更進一步了解兒童的深層概念或兒童使用這些語彙之間的差異的再確認。(3)從第二章文獻探討的結果，兒童辨圖形和繪圖形是不同的兩件事，前者只需憑直觀，後者除了知覺判斷外，尚需具有心智方面的能力。(4)從第一階段探索的結果，兒童在辨識兩個幾何圖卡和辨識圖形及繪圖形三者的表現確實有差異。

本研究晤談分三個階段實施，主要是因為顧慮到兒童持續力無法長久和本研究受到人力、時間的因素。每個階段均包含三個活動，茲分別說明每個活動使用的工具的發展過程。

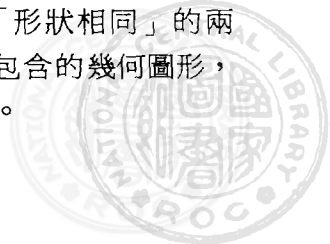
第一階段的幾何圖卡：在探索性研究時期，曾利用白色厚紙板裁製而成，但由於易造成工具的折損及因技術問題，而造成不必要的干擾，這個階段的目的是找出兒童如何使用與「相似性」相關語彙。首先提供雙胞胎的照片，以能找出兒童在辨認兩個相似圖形的自發性的相關語彙，在設計上的考慮，研究者均不參有任何主觀的成份，探索兒童對兩個圖形存在的現象。在圖卡的設計上為了能看出兒童所依據的屬性是那些？顏色、大小、各種圖形的形狀...等屬性在設計時不刻意避免。為了避免低年級兒童是因不會使用尺量刻度的技術而導致錯誤的辨認圖形，特別在有些圖卡上畫有小方格，以作為辨識時的輔助。在幾何圖形的選取方面，以顧慮到能深入的探討和普遍性為原則。所以平面圖形包含有圓形、正方形、長方形、正三角形、等腰三角形、銳角三角形、鈍角三角形。

第二階段的幾何圖卡：第二階段晤談的幾何圖卡乃依據第一階段的結果發展而成的，第一階段的晤談結果是：大部份的兒童能辨識正方形、圓形；而且辨識長方形和三角形對同年齡層或不同年齡群的兒童有極大的差異。兒童在辨識兩個圖形是否相似受到大小、方向、形狀的影響，但畫有小方格的圖卡兒童



非但不將它視為是長度的輔助，反而變成是辨識圖形的干擾。這個階段的目的是以更深入的探討兒童對各種幾何圖形的描述。四邊形包含的幾何圖形：有正方形、長方形、菱形、不規則四邊形，另外以這些圖形分別縮小80%、縮小50%的相似圖形和不相似的等積異形及等積異形分別縮小80%、縮小50%。

第三階段的幾何圖卡：第三階段有關長方形的幾何圖卡乃依據第一、二階段的結果發展而成的，由前面兩個階段獲得的結果：兒童辨認兩相似圖形所依據的屬性是：大小、方向、顏色、材質、形狀，而形狀、大小、方向與數學概念較有直接的關係。也發現到兒童對於「形狀相同」的認知有顯著的差異。長方形是小學階段不陌生的一種圖形，而三角形對低年級的兒童經驗不多，故為了想探討圖形「形狀相同」概念的發展，應該首先對此圖形有基本的認識，基於以上的考慮，第三階段的幾何圖卡主要的目的是建立兒童「形狀相同」的兩個圖形在認知上的發展，在設計上不考慮顏色、因素因素，所包含的幾何圖形，以長寬的變化和角度的變化，而有長方形、平行四邊、正方形。



茲將三個階段的唔談幾何圖卡工具，如表 3-2

表 3-2 幾何圖卡唔談工具一覽表

| 圖形 變因 階段 | | 圓形 | 正方形 | 長方形 | 正三角形 | 等腰三角形 | |
|----------------|--|--------|--------|-------------------------------|---------------------------------|------------------------------------|----------|
| 第一階段 | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| 圖形 變因 階段 | | 不規則四邊形 | 正方形 | 長方形 | | 菱形 | |
| 第二階段 | | 不規則四邊形 | 正方形 | 標準圖 縮80% 縮50% | | 標準圖 縮80% 縮50% | |
| | | 甲 | 庚 | TJ | TJ ₁ TJ ₂ | T乙 T乙 ₁ T乙 ₂ | |
| | | | | | | | |
| | | | | 等積異形 縮80% 縮50% | 等積異形 縮80% 縮50% | | |
| | | | 丁 | 丁 ₁ 丁 ₂ | 乙 乙 ₁ 乙 ₂ | | |
| | | | | | | | |
| 圖形 變因 階段 | | 長 方 形 | | | | | |
| 第三階段 | | 標準圖 | 長固定寬增加 | 長固定寬減半 | 長寬縮短 | 長長寬固定角角度改變 | 長寬各減長寬差值 |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |



2. 辨識圖形的工具：

辨識圖形活動的目的是探討兒童脫離可具體操作的實物，能否運用心智操作的能力，確認兒童辨識圖卡和圖形之間的差異。

第一階段的辨識圖形活動：將幾何圖形畫在方格點上，因為低年級兒童尚未具有實測的技能，並檢驗兒童是否將其作為解題策略之一，包含的幾何圖形有每組正方形、直角三角形、長方形、銳角三角形、鈍角三角形，每組圖形考慮的變因有：各邊放大1倍、 $3/2$ 倍、縮小1倍、長寬變大但不放、大方向、全等。

第二階段的辨識圖形活動：將幾何圖形畫在方格點上，每組四邊形分別是平行四邊形、菱形、不規則四邊形、長方形。不規則四邊形主要是想了解兒童是否依同類別（都是有四個邊）辨別圖形的相似，另外四組的每一組都是同類圖形（都是平行四邊形，都是菱形……），考慮的變因有：放大整數倍、大小相差些微、長寬改變、長固定寬減少、全等但方向不同、角度不同。

第三階段的辨識圖形活動：所設計的圖形都是長方形，變因的考慮是與幾何圖卡完全相同，依長、寬、角度、方向作為設計的變因，如表 3-3

3. 繪圖形活動的工具：

繪圖活動的目的是想要確認兒童對於兩個圖形所用的「相似」、「放大」、「縮小」、「形狀相同」之間差異，如相似的兩個長方形是因為都是長方形而且大小差不多，「相像」兒童也是如此的解說，但兒童認為這二者仍是有程度上的區別，因此難以由口述獲得答案，此時繪出認為相似和相像的圖來確認是必需的。這個活動亦可以看出兒童是透過直觀的畫出輪廓或注意圖形的組成要素及解題時所用對應策略或測量策略。第一階段提供了點格紙，第二階段將四邊形畫在二張點格紙上，畫有圖形中的一部分——線段和角，目的是想要了解是否注意到兩個相似圖形邊和角的對應，兩個圖形相似是否放棄方向的考慮，所認為原圖的相似圖通常是畫出比原圖大或比原圖小？並能確認兒童是只注意到概形或已注意到邊角的構成要素，或更進一步的使用尺的測量和角的度量達到概念的精緻化。第三階段畫長方形的相似圖，第一題的目的是了解兒童是否能畫出與原圖不同方向的較大和較小的相同形狀的長方形。第二題的目的是要了解兒童畫相同形狀的長方形是否僅注意名稱或把握概形，或注意到對應的邊的大小關係；兒童是否能畫出有不同方向的形狀相同之長方形。第三題的目的是要了解兒童是否注意到角的對應。由於長方形都是直角，因此無法測出其是否有對應的概念，故提供不規則四邊形。將上述的說明列成表 3-3。

表 3-3 三個階段的辨識圖形與繪圖形的變因設計表

| 活動 方式 變 階 段 | 辨識圖形活動 | | | | | 繪圖活動工具 | | | | | | | |
|-------------------------|-------------------------------|-----------------------------------|---|--|---------------------------------------|-------------------------|--------------------------------|--------------------------------|-----------------------------|------------------|-----------------------|--|--------------------------------------|
| | 正方形 | 直 角 | 長方形 | 銳 角 | 鈍 角 | 正方形 | 直 角 | 長方形 | 銳 角 | | | | |
| 第一階段 | 大小不同 | 長放大一倍 長放大三倍 | 邊縮長 長少一 縮後旋 小旋單 了轉位 一90寬 倍度固 定 | 各變全 邊大等 長但放 放不旋 大放轉 一90度 | 邊兩邊 長邊放 放大大 大3一 倍倍2 第三 | | | | | | | | |
| 第二階段 | 平行四邊形 | 菱形 | 不規則四邊形 | 長方形 | 長方形 | 長方形 | 菱 形 | | 不規則四邊形 | | | | |
| | 1.3.5.等底等高等高 2.4.、角全等但方向不同 | 1. 全等方向不同，有一對角 3. 相似 4. 正方形 | 1.3. 全較相 等大方向不相似 2.4. 大較小不相多 相似 | 1.3. 長縮小各1 1 4. 長全減1、寬加1 2. 長全等邊方向不同 | 1. 4. 菱形 2. 菱形 3. 不規則四邊形 | 1. 邊的對應和方向不同 2. 角的對應 | 1. 邊的對應和方向的不同 2. 角的對應和方向的不同 | 1. 邊的對應和方向的不同 2. 角的對應和方向的不同 | | | | | |
| 第三階段 | 長 方 形 | | | | | 長 方 形 | | | 不規則四邊形 | | | | |
| | 長角方 寬度向 固定 | 長角方 寬度向 固定 | 角 度 不 同 | 長 加 1 | 寬 縮 1 /2 | 長 縮 1 /2 | 長 寬 相 同 差 值 | 差 任 意 數 | 邊 長 各 縮 1 /2 | 提 供 點 紙 | 不 點 提 紙 供 | 不 提 供 點 紙 | |
| 階 段 | | | | | | | | | | 放縮大小 | 任意畫、提供一角 | 提 供 不 同 一 邊 長 但 方 向 | 提 供 一 邊 長 但 方 向 |



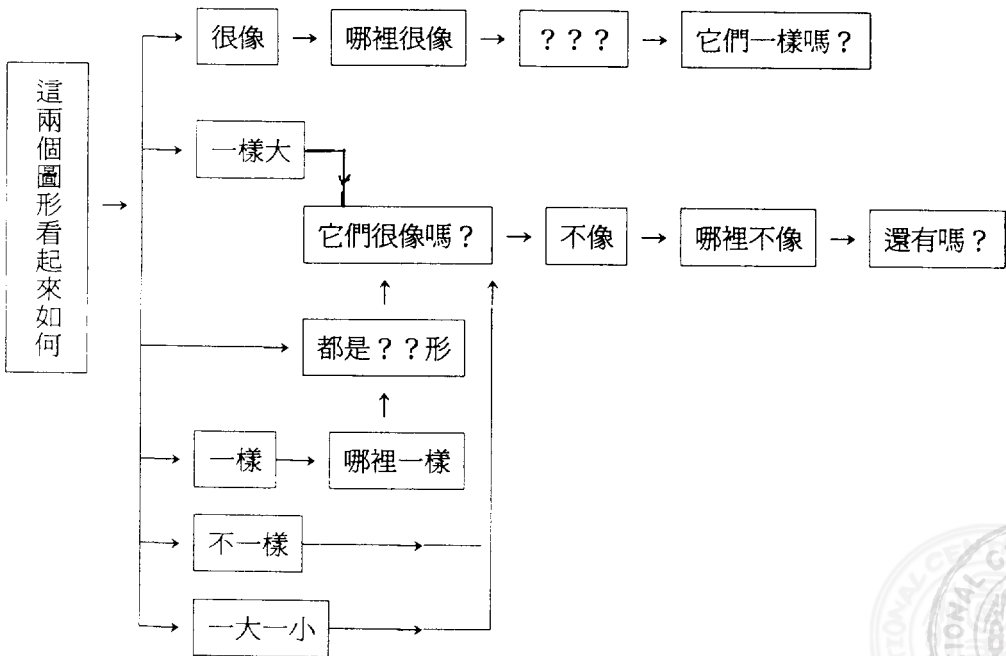
本研究三個階段的晤談，每個階段的發展是有程序性的，後面階段的產生完全是根據前面階段探索的結果而來的，每個階段發展出的工具相當於是在提高工具的內容效度，每套工具的產生是由數學教育、認知心理學和兒童發展的學者共同討論而建立的。

第三節 實施程序

八十年六月開始進行研究，研究期間進行晤談技術的訓練，並編擬、修改晤談工具，自十一月起至八十一年五月底全部樣本實施完成，共完成三個階段的晤談，實施程序是：

(一)八十年十一月第一階段的晤談：以樣本學校的一至六年級，每個年級 2 名，依次進行晤談，第一部分的幾何圖卡晤談，由具有晤談經驗的一位研究人員負責晤談，一位作晤談記錄，其餘研究人員在旁觀察，爲了不使問題有遺漏或達到一致性，因此依一定的晤談模式進行晤談，表 3-4 晤談時首先呈現雙胞胎照片，找出自發性的用語後，接著呈現以成對的兩個圖形，左圖作爲標準圖。

表 3-4 晤談模式



接著進行第二部分和第三部分的辨識圖形活動和畫圖活動，兩個活動學生執行完畢後，請學生說明理由、解釋原因，每位學生晤談的過程均有錄音和錄影，以便資料的整理分析。

(二)八十一年四月初至五月中旬進行第二、三階段的晤談；以樣本學校的一、四、六年級各 4 名，依次分成兩組進行晤談，各組由晤談者、記錄者和錄影者各一人組成，晤談者依一定的晤談模式，記錄者則依已編擬好的晤談記錄表作記錄，以提高晤談者的信度，三個部分的活動均做全程的錄音和錄影。以上三個階段的各個活動的實施程序，列成圖 3-1

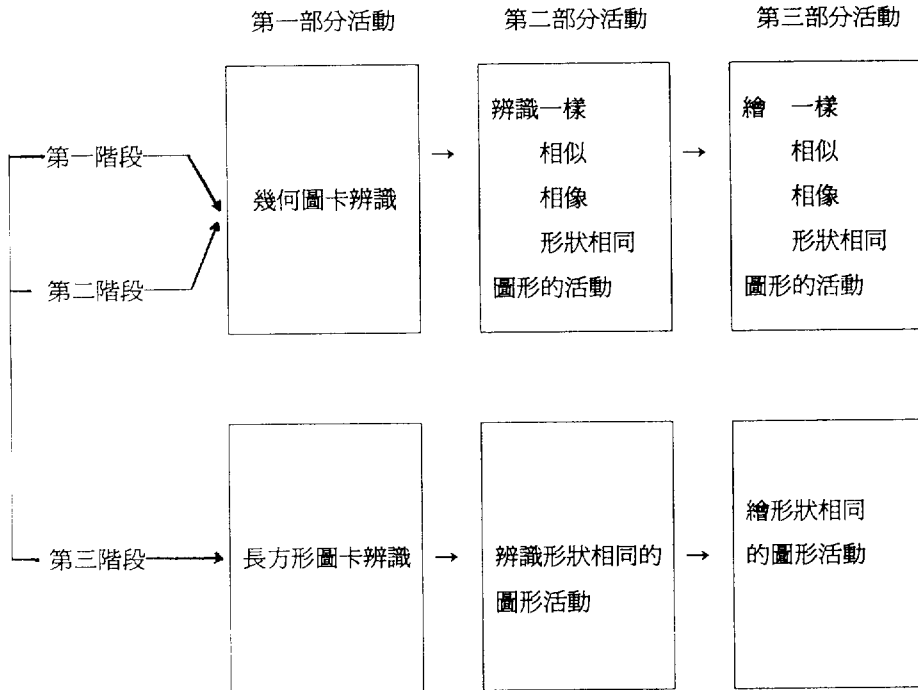


圖3-1 研究工具實施流程圖



第四章 研究結果與討論

第一節 描述兩個相似圖形兒童使用的語彙

兒童經常用來描述兩個相似的幾何圖形的語彙是：一樣、一模一樣、相同、相像、好像、差不多、相似、縮小放大、形狀相同。其中一樣、一模一樣、相同、好像、相像、差不多，兒童自發性地使用的語彙，縮小放大和相似經常是透過晤談的引導後兒童才使用的語詞。相像、一模一樣、一樣是各個年級的兒童能使用的語詞。「相似」對有些低年級兒童而言是陌生的，雖然中高年級的兒童皆聽過「相似」一詞，但「相似」對未經過幾何教學的兒童而言，都是在日常生活中使用的「相似」，相當於「好像」；意指兩個圖形的各種屬性相同的程度或兩個圖形具有多少的相同屬性；「相似」對經過放大縮小圖教學後的兒童而言，則認為「相似」有不同場合的兩個用法，一是日常生活的，一是數學上的。「一樣」和「相同」對兒童而言是同義詞，「好像」比「相像」更接近「一模一樣」，兒童對兩者判斷的依據是相同的，只是標準的不同，但此標準只憑直覺，而沒有絕對的標準，故而分析時將「好像」「相像」和「差不多」視為是同義詞。

1. 「一樣」和「一模一樣」

(1)大部分的兒童認為兩個圖形的各種屬性，諸如：顏色、大小、形狀、材料、質料的特徵、圖案等。兒童直覺上認為是相同的，則判斷兩個圖形是「一樣」或「一模一樣」。反之，若兩圖形有一屬性不同，有些兒童則判斷兩圖形不一樣，有些兒童則不判斷兩個圖形不一樣，卻說這兩個圖形只是此屬性不同，但其他屬性仍相同，諸如：一大一小的兩個長方形，兒童回答：「這兩個圖形大小不一樣，形狀一樣，顏色一樣」。

(2)低年級的有些兒童則認為兩個圖形的屬性，只要有一個是相同或不相同即判斷兩圖形是一樣或不一樣。

(3)晤談中有一位高年級的兒童認為「一樣」在一般生活中不可能存在的，因為雖然在實驗室中兩個一樣的圖形，肉眼上也會有相差一點點還不到一樣的程度，但在「普通狀況下」還是認為「一樣」。總而言之，有些低年級兒童是以若兩圖形有一共同屬性即判斷為「一樣」，大多數兒童是以憑視覺而能判斷出兩個圖形的屬性完全相同才判斷兩圖形「一模一樣」。有些高年級的兒童認為兩個圖形一樣是不可能存在的。除非是降低要求的標準，認為在普通狀況下的兩個圖形才有可能「一樣」。

2. 「相像」和「相似」



兒童認為「相像」是兩個圖形的各種屬性相差「些微」。諸如：一白一綠的兩個圖就不是「相像」；一大一小的兩個圖形就不相像。「些微」對兒童而言是有不同的尺度標準，但都是他們所認為的差一點點，大部分低年級的兒童認為「一模一樣」不是「相像」或「不相像」。

從晤談中發現一年級兒童案例的回答是

- 以因為兩個圖形的顏色像（一樣）所以兩個圖形像（一樣）。
- 以因為兩個都是正的或歪歪的兩個圖形像（一樣）如：（用手指出）
- 以因為兩個圖形有一邊都是平平的，如（用手指出）所以兩個圖形相像
- 以因為一個是直直的，一個是歪歪的，如（用手指出）所以兩個不相像，也不一樣。

兒童以這樣的標準判斷兩個圖形是否相像（一）易於對同名稱的圖形（如都是長方形，都是菱形，都是正方形）做出相像或一樣的判斷，因為提供的兩圖形中易於找到一個共同性，如一個長方形和一個正方形，雖不屬於同名稱的圖形，兒童亦能找到兩者的共同性是都是正正的，而判斷這兩個圖形相像或一樣，所有成對出現的正方形和菱形也是做如此的判斷。（二）大小不是影響判斷的重要因素之一，如一個正方形和一個小正方形雖然大小不一樣，事實上大小只是一個圖形的屬性之一，仍可找到兩圖形的另一個共同點——都是正正的，所以仍然判斷兩圖形是相像或一樣。（三）兩個圖形判斷是相像也通常判斷是一樣。兩個圖形判斷是一樣，通常也判斷是相像，因為相像、一樣的判斷準則，都是只要能找出兩個圖形的一個共同性，但判斷是相像所依據的共同性不一定是判斷一樣時所依據的共同性。

(2)大部分的兒童認為兩個圖形「相像」首先必需是都是長方形；都是菱形；都是梯形，而且兩個圖形大小差不多。此處大小差不多在兒童看來是可容忍的範圍。兒童判斷一個正方形和一個長寬差值很小而且大小差不多的兩個長方形為「相像」，理由是：「因為兩個都是正方形，而且大小差不多」，有些兒童判斷「一模一樣」是「相像」；因為「它有的另一個也有」。

(3)中、高年級大部分判斷兩圖形是否「相似」所依據的原則和「相像」是相同的，高年級經過學校縮圖與比例尺的教學後，有些兒童知道兩個放大縮小圖是相似，在作圖卡判斷時則能很系統地測量出邊的長度再算出是否長：長＝寬：寬，但在紙上辨識兩圖形是否「相似」時，所依據的標準又是日常生活的「相似」，稍為沈思片刻，又記起老師的話，現在是處理數學問題，因此又重新以邊長是否成比例關係而作為「相似」的判斷依據。

(4)有些低年級的兒童認為「相像」就是「一模一樣」，如(1)中的理由只要有一屬性相同就是相像或一模一樣，但也有高年級的兒童認為相像就是一模一樣，相像就是兩個圖形沒有任何的差別，兩圖形只要有一屬性不同則判斷為



不相像。

綜合上述有些低年級兒童以具有一共同屬性，則判斷兩圖形「相像」，有些兒童以名稱相同而且大小差不多作為判斷的理由，有些兒童以各種屬性皆相差些微或完全相同才判斷為「相像」，未學過「相似性」之兒童，判斷「相似」的理由與「相像」是相同的，而學過「相似性」的兒童，判斷兩圖形是否相似最初易以日常生活的「相似」作判斷，但最後仍然以數學上的「相似性」來判斷。

3. 「形狀相同」

(1) 低年級兒童都認為所有長方形的形狀相同，所有的菱形形狀相同，所有梯形的形狀都相同，大部分的低年級兒童亦能分辨出菱形、梯形、長方形形狀的不同。低年級兒童「形狀相同」判斷的依據是「名稱相同」。

(2) 中年級以上的兒童並不認為所有長方形的形狀相同，因為有胖寬型的，有瘦長型的，但在作菱形的判斷時則又陷入「名稱相同」而判斷出所有菱形的形狀相同，因為所認識的菱形特徵是尖尖的角在上、下兩方。

(3) 高年級有些兒童仍然以名稱是否相同，判斷「形狀是否相同」。有些經過教學後的兒童，能以邊長成比例的關係做為判斷的依據，有些兒童仍然沒有知覺到「放大縮小的兩圖形形狀是相同」這件事，雖然在判斷「放大縮小」時能熟用對應邊長成比例，但「形狀是否相同」仍然以「名稱是否相同」來判斷。例如：六年級翁生判斷出正方形和長方形形狀相同；長方形和平行四邊形狀相同；梯形和平行四邊形的形狀相同，他的理由是「正方形也是長方形」「長方形有兩雙對邊平行」「梯形有一雙對邊平行」。以「名稱相同」作為判斷「形狀相同」的充分條件。

綜合上述：兒童辨認兩圖形是否形狀相同有認知上的差異，若這兩個圖形為熟悉的長方形，則具有核心屬性作出較正確的判斷，若此兩圖形為較陌生的菱形，兒童經驗中的最佳事例——名稱相同作判斷，兒童的這種認知與 Vollerath (1977) 提到兒童將「形狀相同」說為「名稱相同」有一致的結果。

4. 「放大」「縮小」

大部分的兒童皆認為放大就是原圖的區域變大或加大；能保握的一個原則是長方形放大後仍為長方形，正方形放大後仍為正方形。這類兒童認為一模一樣的兩圖不是放大圖，有些兒童則認為面積有差一點就是放大，有些兒童疊合兩圖形後發現一個面積是另一個的整數倍就是放大，有些兒童則用「對應邊成比例」「對應角相等」去判斷，有些兒童則認為一個圖形放大後角度不會改變，若二個瘦長型或短胖型的長方形則是放大圖，但對於等積異形的長方形有些兒童經過疊合後，說出：「因為它的長比另一個長很多，短邊比短邊差很小，所以不是放大」。

本節結論：「一樣」、「一模一樣」、「相同」、「相像」、「好像」、「差不多」、「相似」、「縮小放大」、「形狀相同」、是兒童用來描述兩個相似幾何圖形的語彙。兒童將「一樣」、「一模一樣」、「相同」三者視為是同義詞。「相像」、「好像」、「差不多」若將依據的尺度放寬，則視三者為同義詞。教學前的兒童將「相似」和「相像」視為同義詞，教學後的有些兒童有認知上的轉變。「形狀相同」是兒童熟悉的語彙之一，兒童在認知上的轉變越趨向於標準的「相似性」定義。



| 語彙 | | | | | 陳述的理由 |
|-----------|-----------|-----------|-------------|-----------|-------|
| (一) 一樣 | (二) 相像 | (三) 相似 | (四) 形狀相同 | (五) 放大 | |
| ✓ | ✓ | | ✓ | | |
| ✓ | | | ✓ | | |
| ✓ | ✓ | ✓ | | ✓ | |
| ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | | |
| | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | |
| | | | ✓ | | |
| | | | | ✓ | |
| 縮圖與比例尺教學 | | | 前 | | |
| | | | 後 | | |

圖4-1 兒童使用語彙陳述的理由比較



第二節 兒童對於四邊形幾何圖卡的辨認—屬性、語言、解題策略

一、各種圖形的屬性和語言

圖形的顏色、大小、材料（橡皮做的）、質料的特徵（光亮的、軟軟的、乾乾淨淨的、薄薄的……）、圖案（有線條、一格一格的…）和形狀（長方形、正方形、菱形…）是兒童辨識兩個幾何圖卡時所專注的屬性，尤其是兒童對大小和形狀的描述各個年級有其不同的語言。

1. 低年級兒童對於大小的辨認僅能憑直覺的判斷，而常有錯誤的判斷發生，例如：長方形經常認為是正方形。在描述圖形的形狀時，常與生活經驗相結合。如圓形描述為像眼睛；像哥哥帶弟弟；很圓，將兩個菱形描述為一個媽媽和一個小孩；一個姊姊和一個妹妹；像風箏；像寶石，將梯形描述為像溜滑梯；像裙子。較熟悉的圖形是長方形、圓形、正方形，將正方形叫做四方形或方形，有些兒童能說出菱形的名稱，有些不能，所有低年級兒童均不知道梯形的名稱。




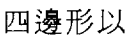
低年級兒童在辨識圖形的形狀時，特別著重在整個圖卡的方向位置或圖形的部分的方向位置，兒童描述兩個長方形都是平平的、正正的、四四方方的、直直的、站著的、躺著的、長長的、平高；長方形有胖胖的、瘦瘦的、大大的、寬寬的、高高的、直直的、小小的、窄窄的、有長長方形和短長方形。常以較不成熟的非標準語言描述長方形或正方形的「邊」為外面的線都是直直的；公分都一樣；線都一樣；一個較長一個較短，將「角」描述為「尖尖的」，將「邊」說成「線」。菱形的邊和角則描述為有四個尖尖的、斜斜的、歪歪的，有站起來的、沒有直直的地方、它有兩個三角形組合在一起。

2. 中年級兒童對於大小的辨認能藉由疊合的方式確定兩個圖形的大小，能用較標準的語言描述兩個圖形的形狀，並能注意到組成圖形的元素，諸如：正方形都有四個角；四個邊每邊長一樣；有兩對互相平行。長方形就是有四個角度；一對長一對短；平方公分都一樣；有四個直角；有長有寬。將長方形描述為像錄音機、像電視機、有扁的、有矮的、胖的、瘦的、長和寬相差一點，所有中年級的兒童都能說出菱形的名稱，但所認識的菱形是較尖的兩個角在上、下兩個位置，若將菱形轉成較尖的兩角是在左、右方則說成是平行四邊形。描述菱形為像鑽石；有兩條對角線；有兩對互相平行；沒有90度；四個邊都一樣；有四個角。中年級有些兒童說不出梯形的名稱，描述梯形是有四個角是歪歪的。很顯然的，中年級兒童對於較不熟悉的梯形和菱形的辨識較專注於幾何圖形的方向位置，但對於較熟悉的正方形和長方形則能進展到用標準的術語描述其組成元素。













3. 高年級兒童對於大小除了憑直覺外，尚能使用疊合和測量的方法確認之，需要時則藉由計算方式求出二個圖形的面積再比較。辨認圖形的形狀時，能完整地以更簡捷的語言說出長方形、正方形、菱形、梯形的定義。不再專注於整體圖形的特徵，高高瘦瘦的，矮矮胖胖的，正正的等語言不再是常聽見的。描述正方形是有四個邊一樣；每個角都是直角或90度。兩個正方形則說：四個邊對應一樣，長方形是有兩雙對邊平行，有4個直角，有兩對邊一樣長。兩個長方形則說：長減寬=長減寬或長：長=寬：寬，菱形是四個邊都一樣，有四個點，對邊平行，它是平行四邊形，它是四邊形，正方形是菱形，梯形是沒有直角，有四個邊，上底和下底只有一對邊平行。有些兒童描述梯形為像樓梯；四邊長不怎麼有規則或稱它為歪七扭八形。





二．辨認兩個四邊形圖卡使用的解題策略

晤談時呈現在兒童面前的兩個圖卡，長方形以 ，菱形以 ，梯形以 ，不規則四邊形以  放置供兒童辨識，兒童運用運用著各種不同的策略，有些用眼觀察，有些兒童用疊疊看、比比看、拼拼看、平行、移動、旋轉、翻轉的方法直到找到可依據的參考點，為了求得精確有些兒童則輔用測量工具，如尺和量角器。








兒童對單一圖形的操作，長方形是將它直立的放著，參考點是底線水平位置，菱形的參考點是較尖的兩角放在正上方和正下方，不規則四邊形的參考點是最長一邊放在最下方水平位置，梯形的參考點是將平行的兩底較長的放在下方，較短的放在上方的水平位置，兒童處理兩圖形時通常是將長方形作為參考圖，再者以菱形。以下是兒童常用的操作方法：





(1) 兩個長方形： →  或  或  或 

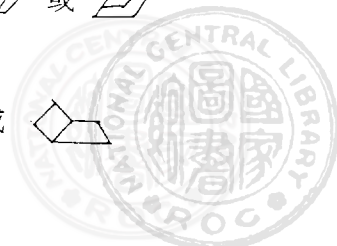
(2) 長方形和正方形： →  或  或  或 

(3) 長方形和菱形： →  或  或 

(4) 長方形和梯形： →  或  或  或 

(5) 菱形和菱形： →  或  或  或 
或  或  或 

(6) 菱形和梯形： →  或  或 



一般而言，疊合或併列是兒童常用來操作的方式，水平位置是兒童用來當作參考點，低年級兒童沒有使用測量的策略，高年級有些兒童則能自發地使用測量的工具。

本節結論

兒童辨認兩圖形時所專注的屬性是顏色、大小、材料、質料的特徵、圖案和形狀。兒童在辨認兩圖形是否相似，是先由整體的圖形外觀或方向位置及圖形的組成部分的特徵或方向位置憑直覺的判斷，但經常作錯誤的判斷，尤其是低年級兒童。中年級的兒童則發展到引導性的操弄圖形或自發性的主動操作，高年級兒童則進展到以概念主導知覺，說明相似性與邊、角之間的關係，也就是 Van Hiele 模式的從直觀階段到分析階段，皮亞傑的從知覺空間到概念空間。

低年級的兒童對於兩圖形之間的屬性常以非標準語描述，將「角」說成「尖尖的」，到了中年級則能用較標準的語言，將正方形描述為有四個直角，四個邊都一樣，高年級的兒童則能使用較精簡的語言描述，即各個年齡層有其使用的語言，而且具有發展性，此結果合乎 Van Hiele 模式提到的每一層次有每一層次發展的語言。

第三節 兒童辨識兩圖形之認知分析

「一樣」、「相像」、「相似」、「放大縮小」這些詞彙並非每位兒童均能自發性的使用，有些詞彙兒童從未聽過或用過，因此隨著兒童使用的詞彙而依這些詞彙再加以確認。以下詳細分析正方形、長方形、菱形、不規則四邊形，兒童對「一樣」、「相像」、「相似」、「放大縮小」的描述。

一、正方形

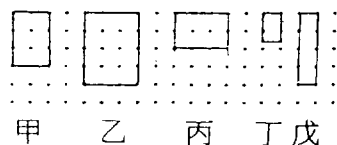
1. 兒童辨識兩個正方形為「放大」

從辨認一組邊長成倍數之兩正方形，面談的 6 個樣本（三、四、五年級）均能辨認大的是小的放大圖，三、四年級兒童判斷的依據是「都是正方形」，五年級判斷的依據是「因為大的是小的 4 倍」，並以格子點作為分析兩個圖形面積的關係。

2. 兒童辨識兩個正方形為「相像」

兒童判斷兩個大小不同的正方形為「相像」，有些兒童解釋的理由是「都是正方形」，有些兒童的理由是「因為都是正方形，而且大小差不多」。「都是正方形」和「都是正方形而且大小差不多」是兒童作為「相像」的判斷依據。

二、長方形



1. 兒童辨識兩長方形為「一樣」

(1) 一樣就是一模一樣：特別是在大小、形狀都一樣，25個樣本中只選甲丙一樣的有19人，理由是「都是一樣大的長方形，只是它倒過來而已」，能擺脫方向的因素，有3位樣本認為乙丙丁戊四圖都不和甲圖一樣，其中的一位年級兒童解釋的理由是「如果我把丙放這樣才會和甲一樣」，顯示仍受方向因素的影響。

(2) 兩長方形一樣就是形狀一樣：有4位全是一年級的兒童選丙丁戊和甲圖一樣，理由是「都是長方形」或「線都很直」，這些兒童認為不是長方形的形狀都不一樣。

(3) 兩長方形一樣就是看起來長相一樣；有2位一年級的兒童選甲和乙丙一樣，理由是「它們是寬寬大大的，另外兩個是瘦瘦的」，似乎是隱含著由寬的大小決定，只有2位選甲乙兩圖是一樣，理由是「兩個都是寬寬站著的長方形，另一個是倒下來的」。

由此歸納出：兒童在紙上辨識兩長方形為「一樣」，形狀、大小、方向是三個主要因素，此處形狀；可能意指圖形的名稱，圖形的長相。方向不影響中、高年級的兒童，而低年級兒童仍深受著方向的影響。「一樣」大致可歸為三類：

(1) 一樣是一模一樣，兩個長方形的大小、形狀一樣 (2) 一樣是形狀一樣，只要是長方形形狀都一樣 (3) 一樣是方向相同和寬度也一樣。

2. 兒童辨識兩長方形為「相像」「相似」

大部分兒童皆認為「相像」和「相似」是同義詞。

(1) 相像就是一模一樣：只選甲、丙是相像，理由是「因為一模一樣」。

(2) 長方形都相像：有3位低年級的兒童選乙、丙、丁、戊四圖和甲圖相像。

(3) 由長寬差值決定是否相像：只有一位四年級的兒童選乙、丙、丁和甲圖相像，理由是「長寬相差較小，另外一個長寬相差較大」。

另外，五位學過「縮圖與比例尺」單元後，對兩長方形「相似」的描述是：

(1) 相似是很接近：有2位只選甲和丙圖相似。

(2) 大小一樣不相似：有1位選乙、丁、戊和甲圖相似，理由是「所有長方形都相似，除了一樣大的長方形」。

(3) 邊長成比例就是相似：有1位只選乙、丙和甲圖相似。

3. 辨識兩長方形為「放大」

(1) 區域有大小之分：若兩圖形有一個大，一個小，即認為大的是小的放大，其中中年級兒童解釋的理由是「只要面積增加就是放大」，五年級的

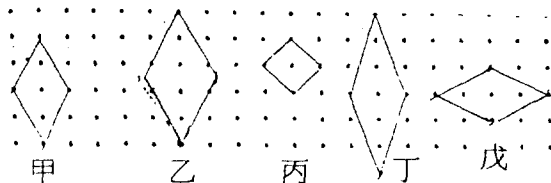


兒童的解釋是「兩圖形必需有面積上的差別」，亦即面積一樣大的兩長方形不可能是放大。

(2) 兩圖形面積成 4 倍或用長 \div 長=寬 \div 寬。

一般而言兒童辨識兩長方形時較能用邊長去分析，而做出正確的判斷，全等的兩長方形在所有樣本中，不管是用區域的大小或面積成倍數或用邊長成比例的關係，均判斷為不是放大圖。

三、菱形



1. 兒童辨識兩菱形為「一樣」

(1) 只要菱形就一樣：低年級有一位選乙丙丁和甲圖一樣。

(2) 一樣就是長相一樣；長相是指各邊和各角與甲圖的相對應的特徵。有 2 位中、高年級選乙、戊和甲圖一樣。

(3) 一樣就是形狀、大小一樣；有 5 位中高年級兒童選戊和甲一樣。

(4) 一樣就是形狀、大小、方向相同；有 2 位低年級兒童認為每一個圖均與甲圖不一樣。

(5) 一樣就是凸顯的特徵一樣：低年級有一位選乙丙丁和甲圖一樣，理由是「三個尖尖的都在上面」。

形狀、大小、方向和組成圖形的要素的特徵是兒童判斷的依據，有些兒童參考的依據是依圖形內所含的點數，很少藉助於量角器或直尺，有些兒童的理由是「因為甲圖有 3 個點，這個圖也是 3 個點」或「對角線上有一條是 5 個點，有一條是 3 個點」。

2. 兒童辨識兩菱形為「相像」「相似」

(1) 認為尖點都在上方就是相像：菱形的特徵是尖尖的在上面，選乙、丙、丁、戊和甲圖相像。

(2) 相像就是在相同形狀之下大小差距要很小：有六位只選甲和乙圖相像，不選戊圖的理由是「因為倒著的」，有些兒童的理由是「大小一樣」，經過「縮圖與比例尺」教學六年級兒童雖然謹記著老師在課堂上強調的「相似就是對應邊成比例，對應角相等」但在紙上辨識兩菱形是否相似時，則易以日常生活中的「相似」作判斷。一位六年級兒童選乙、丙、丁和甲圖相似的理由是「相似是不一樣大小，但都是菱形」，另一位兒童選乙、丙、戊為甲圖的相似圖，理由是「它們的四個邊都一樣，而且角度看起來與原圖差不多」。高年級不受方向的影響。

3. 兒童辨識兩菱形為「放大」「縮小」

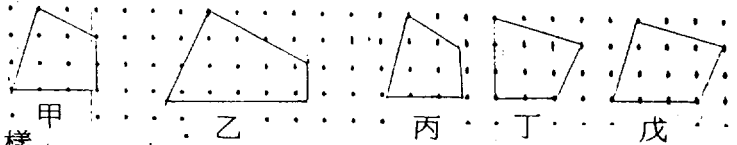
(1) 大小一樣的菱形不是放大圖，放大縮小圖的角度對應相同而且邊長成比



例，六年級有2位只選乙是甲的放大圖。

(2)依對應邊成比例但忽略對應角相等作為「放大」「縮小」的判斷，因而只選乙丁戊是甲圖的放大圖。

四、不規則四邊形：



1. 兒童辨識兩四邊形為「一樣」

不規則四邊形對低年級而言是陌生的，辨識時特別受方向的影響。

(1)兩四邊形的特徵和方向都一樣則判斷為一樣：低年級有一位兒童認為所有形狀與甲圖不一樣。

(2)一樣就是形狀和大小一樣：有2位六年級的兒童判斷丁和甲一樣。

(3)一樣就是圖形的特徵一樣：低年級的兒童選出乙丙圖和甲圖一樣，理由是「最上面有一點最尖點，而且有一線是斜下來的。」

2. 兒童辨識兩四邊形為「相像」「相似」「放大」

(1)相像就是長相差不多：有些低年級選丙丁和甲圖相像；解釋的理由是「它們的樣子最像」。

(2)相像就是一模一樣；就是大小一樣：有些兒童只選丁和甲圖相像。兒童辨識不規則四邊形時，大都是憑直觀把握外形或特徵，方向也是影響判斷的重要因素，提供的點格子對大數兒童是無意義的。對「相似」的判斷，全部的樣本均依據「相像」的判斷原則，沒有一個樣本是依據對應成比例，對應角相等來判斷。

本節結論

不是同名稱的圖形（長方形、正方形、菱形、不規則四邊形）每個年級的兒童皆能判斷出是不一樣、不相像、不相似、一圖不是另一圖的放大圖。在紙上辨識兩圖形判斷的依據是：低年級有些兒童以兩圖形具有相同的某一特徵或某些特徵，再進而以名稱相同（都是長方形，都是正方形……）或以長相、大小因素作為判斷時的考慮。中高年級兒童仍然有些是以名稱相同和長相，進展到以圖形的要素間的關係如長寬的差值，長寬的對應比值作為判斷的依據。一般而言，對於越熟悉的圖形，因為知道的組成元素越完備，則越能作出正確的判斷，當然判斷時也就較能排除不必要的因素，如方向、大小的因素，反之，不熟悉的圖形，則只能憑直觀的印象而作粗略的判斷。從資料分析得知，雖然兒童判斷兩個幾何圖卡能依循較有系統的分析，因為圖卡可以實際的操弄，但在紙上辨識兩個圖形時，則易於以直觀的判斷及受到方向的影響，因為此圖形

不能實際操作，除非是透過心像的操弄。假若兒童在紙上辨識圖形時能超乎知覺的判斷而依循合理的分析，應該是成熟的結果。

第四節 兒童繪幾何圖形之認知分析

由於每位兒童生活經驗的不同，隨著兒童在第一、二階段之第一活動已出現或已使用的詞彙，再輔以透過繪圖活動以了解兒童內在的心理歷程，今詳細分析四邊形中的長方形長方形、菱形、不規則四邊形，兒童繪出認為與原圖是一樣、相似、相像、放大縮小所表現的行爲。

一、長方形

1. 兒童繪出兩個「一樣」的長方形

兒童繪出一樣的長方形的圖所表現的認知行爲，大小、方向、形狀是主要的影響因素，依年級的不同，受到三個因素的影響而有程度上的差異，兒童表現的行爲大致可分為四類：

- (1) 著重長方形的概形：此處長方形概形保有4隻角或具有外形的特徵，低年級的兒童表現的行爲大都屬於這類型。並沒有知覺到長方形的大小和方向，雖然從案例中看到有些兒童畫出的是不同大小，而認定其所畫的是與原圖一樣的長方形，但晤談者從其作圖的過程中觀察到是由於其作圖手眼協調的不適當而造成的，提供的輔助條件如格子點對這類型的兒童是無意義的。
- (2) 同時著重大小、方向、形狀因素：各個階段的兒童均有此類的行爲，有2位低年級，1位中年級和3位高年級。
- (3) 著重大小、形狀兩個因素：兩個圖形一樣就是都為長方形而且大小一樣，不受方向的影響，相當於是幾何上所定義「全等」，有3位兒童屬於這種行爲。
- (4) 著重形狀的因素：大部分的兒童認為兩個圖形一樣就是「因為原圖是長方形，我畫的也是長方形，此處兒童所認定的都是長方形，隨著年級的不同而有認知上的不同，有些兒童認為是有長長的，有些兒童認為是有長邊和短邊，有些兒童認為是對應邊成倍數的關係。

2. 兒童畫出兩個「形狀相同」的長方形的行爲

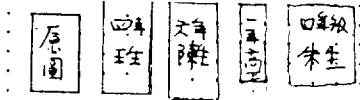
兒童畫出兩個長方形「形狀相同」的行爲可分成四類：

- (1) 有四隻角，正正直直的特徵的長方形，形狀都相同；大部分的低年級兒童屬之，沒有知覺到大小、方向的因素。
- (2) 兩個長方形而且大小一樣，則此兩長方形形狀相同，具有這類行爲的兒

童大多數喜歡畫出與原圖是同方向，只要保持長邊大於短邊。

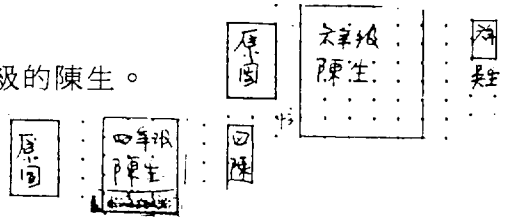
(3)具有長邊和短邊，大小可以不一樣的兩個長方形的形狀相同，有些兒童畫出不同方向的圖，今將畫出的圖形依長邊和短邊與原圖的長邊和短邊的變化歸納為：

- a.以長邊或短邊增減 n 單位：有些兒童以原圖的短邊固定，長邊增加1單位，而且要保持長大於寬，如四年級的王生六年級的陳生，有些兒童以長邊固定短邊減1單位，如一年級的高生和四年級的朱生，六年級的吳生說：「若寬一樣，長就要加大，若長一樣寬就要加大」。



- b.長邊和短邊同時增減 n 單位和 m 單位，也必需保持長大於寬，如六年級的陳生和吳生。

- c.長邊和短邊同時增減 n 單位，如四年級的陳生。



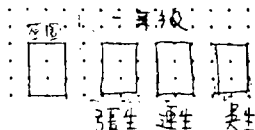
- d.具有對應邊成比例的兩個長方形就是形狀相同：如六年級的翁生、林生、彭生，此類兒童一般是以長擴大2倍，寬擴大1倍，或以長縮小1倍，寬也縮小1倍。

以上兒童表現的行為分析，第一類是兒童把握長方形的特徵，有正正直直的四隻角角，同時完全憑視覺畫出粗略而不精確的圖，毫無知覺到所提供的條件，如點格子、輔助的測量的工具，對有些兒童只是要求線畫直一點而已，只有知覺到一個長方形的特徵，沒有知覺到兩個圖形的對應。第二類的兒童知覺到兩個圖形的長邊大於短邊，就是長方形的特徵，而且注意兩個圖形的對應，也就是注意到單一圖形的長邊大於短邊和兩個圖形的長邊等於長邊，短邊等於短邊。構圖時能以點格子作為參考座標，若沒有提供點格子時，有些兒童只憑直覺，而畫出若似一樣大的長方形，有些兒童則用尺分別量出四邊的長度，作出形狀相同的長方形。第三類兒童不僅具有兩個圖形對應關係，而且能思考兩個圖形對應的長和長的差值，寬和寬的差值。點格子是構圖的依據，若沒有點格子時，兒童則用有刻度尺，量出長和寬的度量，作出相同的形狀。第四類是具有兩個圖形間對應的邊成倍數的關係，能依點格子構圖，若沒有提供點格子時，則能主動性的要求使用尺去測量出長和寬的長度，作出相同的形狀。

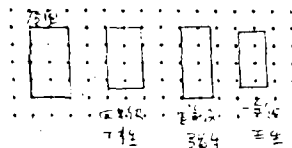
3. 兒童畫出兩個「相像」的長方形的行為

兒童繪一個圖與另一個相像時，形狀、大小是考慮的主要因素，方向不是考慮的因素。有 21 位兒童繪出長方形的相像圖也是長方形，有 2 位只考慮大小因素而畫出的是三角形、四邊形；有 21 位畫出同方向的長方形，4 位低年級的兒童畫出同大小的長方形，將兒童繪出的圖形分類為：

- (1) 同時強調形狀、大小、方向：低年級的張生和連生和吳生所畫出的是一樣大而且同方向的長方形。



- (2) 同時強調形狀而且大小差距不大：兒童畫出的都是長方形但大小不能相差太多，此處大小的調整是依寬固定，長增減一點；長固定寬增減一點，或長寬同時增減一些或相同的一些，如：四年級的林生、張生和一年級的王生。



4. 兒童畫出兩個「相似」的長方形的行為

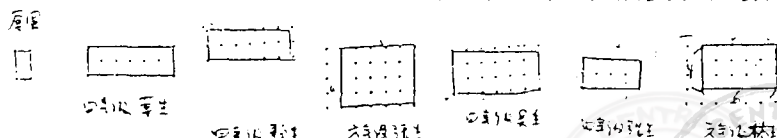
低年級的兒童在畫出「相似」圖和畫出「相像」圖所表現的行為是一樣的。畫出的圖只要是長方形即可，六年級有 2 位兒童認為「相似」和「相像」是同義詞，只要兩個都是長方形而且大小有差距，有 2 位兒童依長方形的長放大 2 倍，寬放大 2 倍作出原圖的相似圖。

5. 兒童畫出長方形的「放大圖」的行為

低年級兒童有些未曾聽過「放大」，有些兒童聽過但不知其意，中年級以上的兒童聽過而且知道照片上人物的「放大」，但從兒童畫出的放大圖有其認知上的差異，下以是晤談樣本所表現的行為分析：

- (1) 將原圖的長邊增加 1 倍或 2 倍的量，如：四年級的葉生，或面積增大一倍，如：四年級的賴生。
- (2) 將原圖的長寬同時增加相同的量，如：六年級的張生。
- (3) 將原圖的長寬同時增加不同的量，如：四年級的吳生。
- (4) 將原圖的長寬同時放大整數倍，如：四年級的張生、六年級的林生。

由以上的分析，在 (1)(2)(3) 兒童所畫出長方形的放大圖是使原圖的區域變大，在 (4) 兒童是依邊長成比例去作圖。通常兒童的行為表現是較偏愛於整數倍，而非分數倍。



二．菱形

菱形幾乎是各年級兒童熟悉的圖形，兒童特別能保握的是菱形的特徵。低

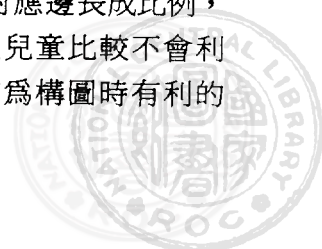
年級有 5 位能畫出菱形的樣子，就是尖尖的在上下方，而忽視所提供的菱形的部分一線段和角，有 3 位低年級兒童不能依提供的線段和角度去完成「一樣」或「相像」的菱形，中高年級的兒童能以菱形的原圖，圖內含有三個點；四個邊一樣長；兩條對角線的長度作為構圖的依據，沒有兒童能依對應角相等而有系統地量出角度去完成與原圖是「一樣」「放大」或「相似」。作出的圖形都是與原圖同方向。能正確地畫出長方形的相似、一樣、放大縮小圖的兒童，未必能正確畫出菱形的各種關係圖，一般只是依四個邊必需相等，如：增加 2 單位或每邊增加一倍。

三．不規則四邊形

不規則四邊形是各年級兒童較陌生的圖形，低年級有 5 位兒童畫不出與原圖是「一樣」和「相像」圖，從其繪圖的過程中隨時地在調整其所畫的圖形與原圖的特徵要在相同的位置或那個一角最尖，那一個邊最斜，但由於缺乏繪圖的技能及手眼協調的不當，故最後仍然無法完成而放棄，有 3 位兒童能完成若似的不規則四邊形，而認定所畫的圖與原圖是「一樣」、「相像」，中高年級大多數的兒童能完成菱形，有些兒童是依據圖形內含有 3 個點而畫出較為接近的圖形，能完成不規則四邊形的兒童中，在作出「相像」圖和「一樣」圖的考慮是相同的，全部樣本中只有 3 位兒童能依循對應角相等和各邊的 3 倍長去完成「放大」圖。

本節結論

皮亞傑認為辨別幾何圖形屬於知覺方面的能力，仿畫圖形屬於表徵空間的能力，表徵空間的建構乃是以感官的經驗，知覺之基模為基礎，因此需要更進一步的發展。從資料分析得到兒童雖然能知道菱形的名稱，知道菱形的四個邊相等，但很難畫出菱形。低年級的兒童仿畫一個圖形時有些是把握此圖形的特徵，尤其偏愛於畫出與原圖形是同方向，有些是畫出粗略的概形。中高年級則較關心於同一圖形的邊長關係或兩圖形的邊長關係，進而能以對應邊長成比例，對應角相等畫出與原圖是相似或形狀相同或是放大圖。低年級兒童比較不會利用提供構圖的有利條件（如點格子），越高年級越能去尋找可作為構圖時有利的參考依據（如測量工具、圖形內的點數、邊上的點數）。



第五節 兒童辨識長方形「形狀相同」概念的發展特徵

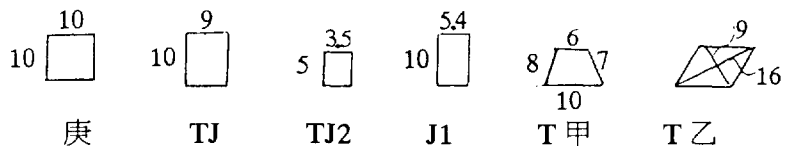
一．從辨識圖形的活動中兒童「形狀相同」之認知

1. 兒童從直觀的判斷。從視覺上看來似乎是不同的形狀，判斷為形狀不同，例如瘦長型的、寬胖型從視覺上看起來是很顯然的的不同，所以形狀不相同。但若以「名稱是否相同」作為判斷依據的兒童，則認為長方形的形狀都相同。
2. 以長或寬作為分析的依據。若長和寬差值很大，或長和長差值很大，易由直觀判斷。若差值很小則需依循測量的工具得到標準的度量。有些兒童以一個長方形的長邊或短邊為基準，疊到另一個長方形上面，若正好是整數倍，則判定為形狀相同。有些兒童疊合後說：「面積正好是4倍」而判斷為形狀相同，若面積為3倍則判斷為形狀不相同。
3. 除非兒童能知覺到形狀相同就是數學上的相似：對應邊成比例對應角相等，否則兒童作出與原長方形「形狀相同」的圖時，只用粗略的標準去畫出看起來形狀差不多相同，不太需要有系統去測量出角度或對應邊的大小。

二．從分類圖形的活動中兒童「形狀相同」之認知

兒童均認為長方形、正方形、菱形、不規則四邊形的形狀不相同，也認為所有長方形、所有正方形、所有的梯形的形狀相同，此處的形狀相同僅是「名稱相同」，為了能了解兒童是否具有更精緻化的概念，因此採用分類的方法。

(一) 當提供的圖形是



兒童分類為：

- ㄅ. 分成 5 堆：
- a. 正方形 (庚)
 - b. 長方形 (TJ, TJ2)
 - c. 不規則四邊形 (T甲)
 - d. 菱形 (T乙)
 - e. 瘦長長方形 (J1)
- ㄆ. 分成 4 堆：
- a. 正方形 (庚)
 - b. 長方形 (TJ, J1, TJ2)



c. 不規則四邊形 (T 甲)

d. 菱形 (T 乙)

□ . 分成 3 堆 : a. 正方形、菱形 (庚 , T 乙)

b. 長方形 (TJ , T1 , TJ2)

c. 四邊形 (T 甲)

□ . 分成 2 堆 : a. 平行四邊形 (庚 , TJ , J1 , TT2 , T 乙 , T 甲)

b. 四邊形 (T 甲)

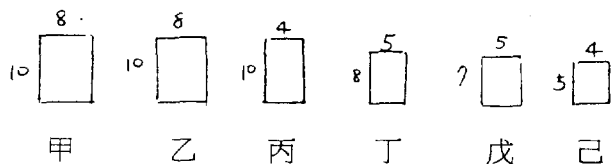
◇ . 分成 1 堆 : a. 四邊形 (庚 , TJ , J1 , TT2 , T 乙 , T 甲)

去 . 分成 2 堆 : a. 正正的 (TJ , 庚 , J1 , TJ2)

b. 斜斜的 (T 甲 , T 乙)

低年級兒童分類的方法大部分只有一種，通常是去或女的分法，以女的分法，因為正方形和長方形兒童認為是不同的。以去的分法，理由是「正正的，有些斜斜的，歪歪的」。中年級的兒童可依□和◇和□的分法，有些兒童以□的分法，解釋的理由是「一堆是長方形，一堆是四個邊都相等，一堆是四個邊都不相等」。高年級的兒童具有較多種分法，有些兒童能較有系統的分類，如六年級的翁生有女到◇，共 4 種分法，女的分法是依正方形、長方形、四邊形、菱形，又因為正方形也是長方形，所以可合併為長方形、四邊形、菱形三堆，又因長方形和菱都形都有對邊平行，又可合併為平行四邊形和四邊形共二堆，平行四邊形也是四邊形，又可合併為四邊形一堆。

中、高年級雖然都有◇的分法，但解釋的理由不同，中年級兒童認為長方形 TJ、TJ2、J1 不能合併的理由是因為 J1 太瘦。高年級兒童的解釋是「我用尺量出 TJ 的長是 10 寬是 9，而 J1 的長是 10，寬是 5.4，兩邊增加不一樣多」。六種分法中只有以◇分法的兒童能辨出有形狀不同的長方形，但難以推論出其餘五種分法的兒童沒有形狀不同的長方形，因此再提供刺激物全為長方形



時，兒童的分法有：

◇：依長寬差值的接近程度分為 a：長寬接近（甲、乙、己）



- 女：依看起來像正方形
 冂：依大小
 ㄩ：全是長方形：（甲、乙、丙、丁、戊、己）
- b：長寬差值中等（丙、丁）
 c：寬相差最多，大約是 2 倍（丙）
 a：接近正方形（甲、乙、丁、戊、己）
 b：不是正方形（丙）
 a：一樣大（甲、乙）
 b：不一樣大（丙、丁、戊、己）

低年級兒童一般的分法是冂和ㄩ，著重的是外形或大小。中、高年級也容易由大小是否接近來進行分類，但解釋的理由與低年級不同，中、高年級的兒童知道寬寬大大是因為長和寬相差很小，瘦瘦長長是因為長和寬相差很大，到底差值多大，才是分割的值，則因人而異或與提供的圖卡有關。

由此可見，兒童容易透過視覺並以圖形的名稱、圖形的外觀、大小、長寬相差的值作為分類的依據，在研究的樣本中卻未發現是以邊長成比例的關係作為分類的依據。

有些兒童則再從甲乙丙丁戊己六個圖卡中找出與己圖形狀相同的圖卡，兒童找出的答案有三種：

- ㄩ：甲、乙、丙、丁、戊
 女：丙、丁、戊
 冂：甲、乙

ㄩ的分法兒童解釋的理由是「都是長方形」。女的分法由兒童操作圖卡的過程，可以看出依據的用長或寬疊在另一塊的上方，正好是整數倍。冂的分法只出現在六年級的兒童，解釋的理由是「 $10 \div 5 = 2$ ， $8 \div 4 = 2$ 長比長和寬比寬一樣」或「因為戊四塊正好可以疊在甲上面剛剛好」。

雖然有些兒童判斷長方形形狀相同是依據「長和寬要成比例」，但在畫出與甲圖形狀相同的活動時，所依據的卻是長和寬的相差值，如：畫出的相同形狀是採用加法策略。

三、兒童辨識長方形「形狀相同」的概念發展：

從本研究實施的圖卡或紙上圖形的辨識和繪圖三種活動，可以得到兒童辨識圖形時著重於形狀、大小、顏色…等屬性。顏色、大小對兒童是較為具體明確的，例如：二個長方形不一樣大時，兒童立即判斷出一大一小，都是綠色的圖形立即判斷出顏色一樣。唯有「形狀」對兒童是較為模糊的抽象概念，隨著經驗的不同蘊涵的意義也就不同。有些兒童認為所有長方形的形狀都相同，有些兒童認為長方形有的是寬寬的、長長的、胖胖的、瘦瘦的形狀，有些兒童則



寬寬大大的長方形是因為長和寬相差不大。本研究擬從唔談的樣本中建立兒童對長方形「形狀相同」概念的發展特徵。

1.(1) $10 \begin{matrix} 8 \\ \square \\ 10 \end{matrix} \quad 10 \begin{matrix} 10 \\ \square \\ 10 \end{matrix}$ 因為它們的這個 ($\sqrt{\square} \quad \sqrt{\square}$) 都是這樣 (指正正直直的) , 所以形狀相同。

2.(1) $10 \begin{matrix} 8 \\ \square \\ 10 \end{matrix} \quad 10 \begin{matrix} 10 \\ \square \\ 10 \end{matrix}$ (2) $10 \begin{matrix} 8 \\ \square \\ 10 \end{matrix} \quad 8 \begin{matrix} 5 \\ \square \\ 8 \end{matrix}$ 判斷(1)為形狀不同
甲 乙

(2)為形狀不同。理由是因為甲圖有一長長的，有一個短短的，正正直直的就是長方形，乙圖有一個長長的，有一個短短的，正正的就是長方形。

3.(1) $10 \begin{matrix} 8 \\ \square \\ 10 \end{matrix} \quad 10 \begin{matrix} 10 \\ \square \\ 10 \end{matrix}$ (2) $10 \begin{matrix} 8 \\ \square \\ 10 \end{matrix} \quad 8 \begin{matrix} 5 \\ \square \\ 8 \end{matrix}$ (3) $10 \begin{matrix} 8 \\ \square \\ 10 \end{matrix} \quad 5 \begin{matrix} \square \\ \square \\ 9 \end{matrix}$
甲 乙

判斷(1)(2)(3)為形狀不相同，因為甲圖是長方形且長長的，乙圖是長方形且長長的，兩個都是長方形，但一個是躺著的一個是站著的。

4.(1) $10 \begin{matrix} 8 \\ \square \\ 10 \end{matrix} \quad 10 \begin{matrix} 10 \\ \square \\ 10 \end{matrix}$ (2) $10 \begin{matrix} 8 \\ \square \\ 10 \end{matrix} \quad 8 \begin{matrix} 5 \\ \square \\ 8 \end{matrix}$ (3) $10 \begin{matrix} 8 \\ \square \\ 10 \end{matrix} \quad 5 \begin{matrix} \square \\ \square \\ 9 \end{matrix}$
甲 乙

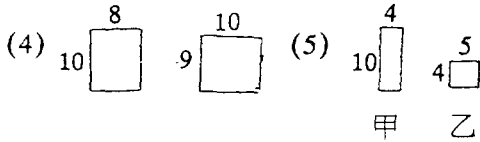
判斷(1)(2)為形狀不相同(3)為形狀相同，因為甲圖是長的長方形，乙圖是橫的長方形，只要把橫的長方形轉過來，兩個就是長的長方形。

5.(1) $10 \begin{matrix} 8 \\ \square \\ 10 \end{matrix} \quad 10 \begin{matrix} 10 \\ \square \\ 10 \end{matrix}$ (2) $10 \begin{matrix} 8 \\ \square \\ 10 \end{matrix} \quad 8 \begin{matrix} 5 \\ \square \\ 8 \end{matrix}$ (3) $10 \begin{matrix} 8 \\ \square \\ 10 \end{matrix} \quad 5 \begin{matrix} \square \\ \square \\ 9 \end{matrix}$
(4) $10 \begin{matrix} 8 \\ \square \\ 10 \end{matrix} \quad 9 \begin{matrix} 10 \\ \square \\ 9 \end{matrix}$
甲 乙

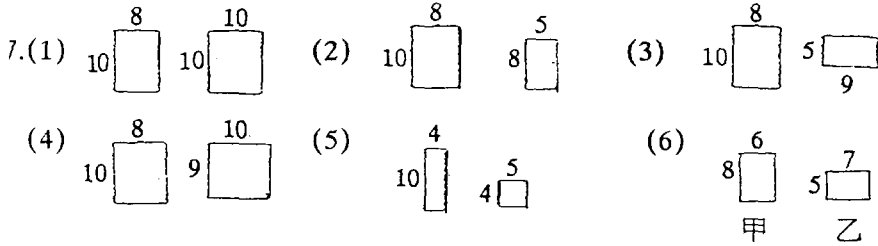
判斷(1)(2)(3)為形狀不同，(4)為形狀相同，因為甲乙兩圖的大小差不多。

6.(1) $10 \begin{matrix} 8 \\ \square \\ 10 \end{matrix} \quad 10 \begin{matrix} 10 \\ \square \\ 10 \end{matrix}$ (2) $10 \begin{matrix} 8 \\ \square \\ 10 \end{matrix} \quad 8 \begin{matrix} 5 \\ \square \\ 8 \end{matrix}$ (3) $10 \begin{matrix} 8 \\ \square \\ 10 \end{matrix} \quad 5 \begin{matrix} \square \\ \square \\ 9 \end{matrix}$

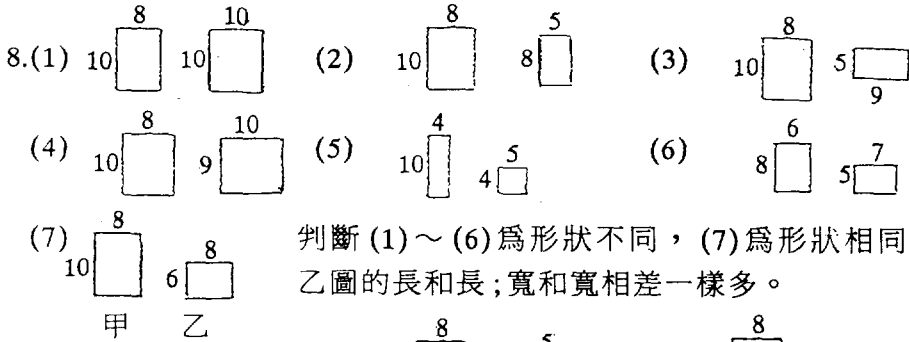




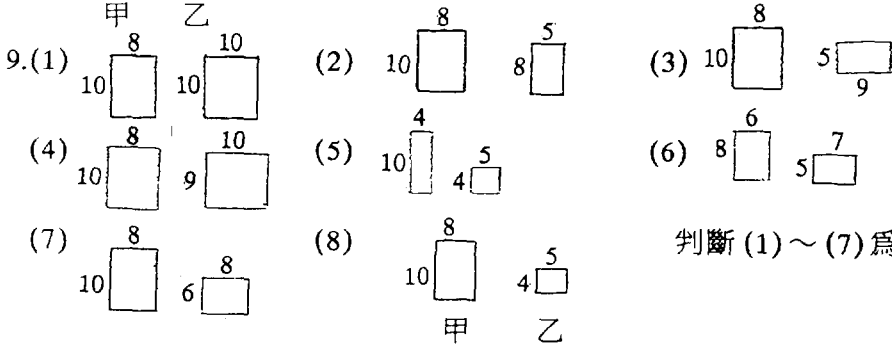
判斷(1)~(4)為形狀不同，(5)為形狀相同。因為甲乙兩圖都是長方形，甲圖有一邊是乙圖一邊的兩倍。



判斷(1)~(5)為形狀不同，(6)為形狀相同。因為甲圖的長和寬相差和乙圖的長和寬相差一樣。



判斷(1)~(6)為形狀不同，(7)為形狀相同。因為甲圖和乙圖的長和長；寬和寬相差一樣多。



判斷(1)~(7)為形狀不同，

(8)為形狀相同。因為甲圖和乙圖兩個長方形的長比長 = 寬比寬。

由以上的發展可以看出，兒童首先僅由圖形的部分特徵判斷，並沒有知覺到兩個圖形的整體的對應，依次是注意到兩個圖形的對應但受到方向和大小因素的干擾。然後進展到以一個邊長或由一個圖形的長與寬的差值作為分析的依據。再進展到以兩個圖形長與長，寬與寬的差值關係，最後發展到以兩個圖形的對應邊成比例的關係作為判斷的依據，也就是「相似性」的定義。實際上，



兒童「形狀相同」的概念發展順序，似乎也合乎 Van Hiele 模式的視覺階段到分析階段；並且符合皮亞傑的知覺空間到表徵空間和概念空間。

第五章 結論與建議

第一節 結論

本研究利用晤談方法，了解兒童「相似性」概念的發展特徵，「形狀相同」是大部分的兒童所能了解的語彙，它與幾何上的「相似」代表著相同的幾何關係。本研究的結果發現兒童的「形狀相同」隨著經驗的成長有認知上的差異。主要的結果歸納為：

(一)兒童描述兩個相似圖形常用的語彙是：「一樣」「一模一樣」「相同」「好像」「差不多」「相似」「縮小放大」「形狀相同」。「一樣」「一模一樣」「相同」是兒童能自發性的使用的語彙，視三者為同義詞。「相似」「縮小放大」是引導性的語彙。「相像」「差不多」「好像」若將要求的尺度放寬，兒童則視三者為同義詞。未學過「縮圖與比例尺」單元教材的兒童，認為「相似」是日常生活用的，它就是「相像」。教學後的兒童，認為「相似」有日常生活和數學上的區別。「放大」和「形狀相同」隨著經驗的成長而有認知上的轉變。

(二)辨識兩相似圖形時，兒童專注的屬性是顏色、大小、材料、質料的特徵、圖案、形狀。低年級的兒童辨識圖形時經常是由兩圖形的輪廓、方向、圖形的部分特徵或方向，以視覺作粗略的判斷，常以非標準語或用手勢來描述圖形的組成元素。中年級的兒童能用較標準的語言描述兩個圖形，能自發性的或引導性的操弄圖形或心像的操作。高年級的兒童則能以概念主導知覺，說明形狀相同與邊角之間的關係，能使用較精簡的語言敘述兩個圖形組成的要素及要素之間關係的聯結。

(三)紙上辨識圖形的活動，兒童不易排除方向的因素，除非是能依循合理的分析兩個圖形的屬性或結構，或依據心像的操作；否則易於憑直覺而作出不正確的判斷。（如易由輪廓或圖形的名稱），由於缺乏實際的疊合、比對、旋轉、反轉等；同樣的，畫出一個圖形與另一個圖形「相似」，對兒童則更加困難了，除了知覺和分析的能力之外，尚需構圖時的手眼協調能力。有些兒童雖然知道「形狀相同」「放大」的兩個圖形關係是對應邊成比例；對應角相等。但構圖時卻往往忽略了「對應角相等」、「對應邊成比例」、而以「一個邊長和另一邊長成倍數」取代「對應邊成比例」。低年級的兒童繪圖時，能把握的只是圖形的輪廓或概形。年級越高的兒童越能主動尋找構圖的有效參考依據。

(如測量工具、圖形內部的點數、邊上的點數、對角線)通常兒童較喜歡畫出與原圖是同方向的圖形。

(四)兒童辨識兩個長方形的概念發展的特徵是：由兩圖形的部分特徵，再知覺到兩個圖形整體的對應，並受到大小方向因素的影響，然後進展到以一個邊長或由一個圖形的長與寬的差值作為分析的依據。再進展到以兩個圖形長與長，寬與寬的差值關係，最後發展到以兩個圖形的對應邊成比例的關係作為判斷的依據，也就是最合乎「相似性」的定義。

第二節 建議

(一)由於受到人力物力的因素，本研究宜增加晤談樣本，而能更完整的建立兒童「相似性」概念發展的特徵。

(二)兒童「相似性」概念發展的特徵是從晤談的樣本中所看到的現象而建立的，結果與討論一章中所列序號是依年級的兒童所發生的現象和數學的邏輯結構而建立的，由於樣本有限，可能發展的序號有所調整，若要建立兒童相似性概念的發展層次，需以本研究發展的特徵作為後續研究的基礎。

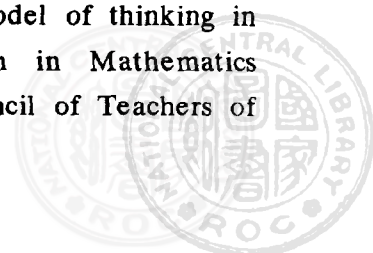
(三)研究的樣本中發現對於兩個圖形的「形狀相同」，已發展到分析兩個圖形邊長對應成比例關係的兒童，卻因它們都是長方形，而再回歸到以圖形的「名稱相同」所以「形狀相同」。兒童這種錯誤的產生主要是成人常將「這些都是長方形」，而說為「它們的形狀都相同」。因此，教師在教學或在教科書必須明確的使用「形狀相同」一詞。

本研究感謝裘友善、蔡文煥老師和劉得坤先生、龔仁棉、杜維媽、趙敏伶小姐的幫忙與協助。

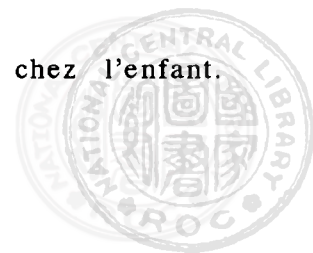


參 考 書 目

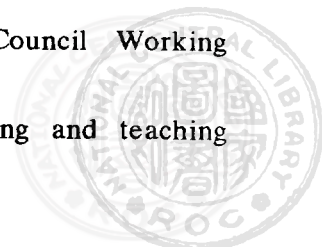
- 林碧珍 (民 74) 數學概念的形成與學習 國教世紀 v.21 No.1,2.新竹師專.
板橋教師研習會 (民 76) 國民小學科學教育環境調查研究報告第十一期 板橋
教師研習會.
- 裘友善;蔡文煥;林碧珍 (出版中,民 81) 我國兒童相似概念發展之研究 國
科會研究報告 國科會專案補助計畫 NSC810111S13401N.
- 蘇英奇 (民 61): 圖形概念的調查分析 臺中師專學報第二期
蘇英奇 (民 64): 圖形教學的改進與圖形概念的發展 臺中師專學報第二期
- Assessment of Performance Unit (APU)(1977-1982) Mathematical Development
Primary Survey Report NO.1,2 and 3 (HMSO;1980,1981,1982)
- Battista, M.T. & Clements, D.H. (1987) Logo-based geometry: Rationale and
curriculum. Paper presented at the meeting of the learning and teaching
geometry: Issues for research and practice working conference, Syracuse,
NY:Syracuse University.
- Burger, W. & Shaughnessy, J.M.(1986) Characterizing the van Hiele levels of
development in geometry . Journal for Research in Mathematics
Education, 17,31-48.
- Crowley, M.L.(1987) The Van Hiele model of the development of ge- ometric
thought.in M.M.Lindquest & A.Shulte (Eds). Learning and teaching
geometry K-12, PP.6-13. Reston, VA: National Council of Teachers of
Mathematics.
- Carey,S.(1982) Conceptual change in childhood. Cambridge,MA: MIT.
- Clements,D.H.(1991) Van Hiele levels of learning geometry,proceeding of
PME15,Vo.1, PP.223-230.
- Chazan,D. et al.(1988) Similarity:Exploring the understanding of a geometric
concept. Cambridge,MA:Educational Technology Center.
- Denis,L.P.(1987) Relationships between stage of cognitive development and van
Hiele level of geometry thought among Puerto Rican adolescents.
Dissertation Abstrcats International,48, 859A. (University Microfilms
No.DA8715795).
- Fuys,D., Geddes, D. & Tishler, R.(1988) The van Hiele model of thinking in
geometry among adolescents. Journal for Research in Mathematics
Education,Monograph, NO.3 Reston. VA: National Council of Teachers of
Mathematics.



- Fuson, K. and Murray, C. (1978) The haptic-visual perception construction and drawing of geometric shapes by children aged two to five: A Piagetian extension. In *Recent Research Concerning the Development of Spatial and Geometric concepts* (Ed), Lesh, R. The Ohio State University :ERIC Clearinghouse for Science Mathematics and Environmental Education.
- Gutierrez, A., Jaime, A. (1988) Globality versus locality of the van Hiele of geometric reasoning. Unpublished manuscript. Universitate De Valencia, Valencia, Spain.
- Greenes, C.E. (1979) The learning disabled child in mathematics. Focus on learning problems in mathematics (Framingham, Massachusettes), 1(1).
- Hart, K.M. (Ed, 1981) Children's understanding of mathematics 11-16. John Murry.
- Hoffer, A. (1983) Van Hiele-based research. In R. Lesh & M. Landau (Ed.). *Acquisition of mathematics concepts and processes*. (pp.205-207). New York: Academic press.
- Karplus, E. Karplus, R. & Wollman, W. (1984) Intellectual development behind elementary school IV, Ratio, the Influence of cognitive style. *School Sciences and Mathematics*, Vo.75, pp.476-482.
- Kerr, Donald R. , Jr. (1981) A geometry lesson from national assessment , *Mathematics Teacher* 74 , pp.27-32.
- Kerslake, D. (1979) Visual mathematics, *Mathematics in School*, 8(2) 34-35.
- Lappan G. & Even R. (1988) Similarity in the middle grades, *Arithmetic Teacher* 35, (9).
- Mayberry, J. (1983) The Van Hiele levels of geometry thought in undergraduate preservice teachers. *Journal for Research in Mathematics Education* 14 , 58-69.
- Mason, M.M. (1989) Geometric understanding and misconceptions among gifted fourth-eighth graders. Paper presented at the meeting of the American Educational Research Association, San Francisco.
- Nasser, L. (1989) Are the van Hiele levels applicable to transformation geometry ? *Proceeding of PME 13 v.1,3*, PP.25-32, Paris.
- Nasser, L. (1989) Children's understanding of congruence according to the van Hiele model of thinking. *Proceeding of PME 13 v.3*, Paris.
- Piaget, J. & Inhelder, B. (1956) *La conception de l'espace chez l'enfant*. Paris: Presses Universitaires de France.



- Piaget, J.; Inhelder, B.; Szeminska, A. (1960) The child's conception of geometry. London: Routledge and Kegan Paul.
- Piaget, J. (1967) The child's conception of space. New York, N.Y., W.W. Norton.
- Pyshkalo, A.M. (1968) Geometry in grades 1-4: Problems in the formation of geometric conceptions in pupils in the primary grades. Moscow, USSR: Prosveshchenie Publishing House.
- Senk, S.L. (1989) Van Hiele levels and achievement in writing geometry proofs. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 309-321.
- Suydam, M.N. (1985) The shape of instruction in geometry: Some highlights from research. *Mathematics Teacher*, 78, 481-86.
- Usiskin, Z. (1982) Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry (Final report of the Cognitive Development and Achievement in Secondary School Geometry Project). Chicago: University of Chicago, Department of Education.
- Van Hiele P.M. (1986) Structure and insight, Orlando: academic press.
- Van Hiele P.M. & Van Hiele-geldof, D. (1958) A method of initiation into geometry at secondary schools. In H. Freudenthal (Ed.), Report on methods of initiation into geometry (pp.67-80). Groningen: J.B. Wolters.
- Van Hiele-Geldof, D. (1984) The didactics of geometry in the lowest class of secondary school. In D. Fuys, D. Geddes, & R. Tischler (Ed.) , English translation of selected writings of Dina van Hiele-geldof and Pierre.M. van Hiele (pp.1-214). Brooklyn, NY: Brooklyn college. School of Education. (ERIC Document Reproduction Service No.289697).
- Van Hiele-Geldof, D. (1984) Didactics of geometry as a learning process for adults. In D. Fuys, D. geddes, & R. Tischler (Eds.). English translation of selected writings of Dina van Hiele-geldof and P.M. van Hiele (pp. 215-233). Brooklyn: Brooklyn College. (Original document in Dutch. De didaktiek van de meetkunde als leerproces voor volwassenen. antwerp. document in dutch, De didaktiek Van de meekande als leerproces Voor Volwass enen. Antwerp: Dr ukkerij "Excelsor" N.V. ,(1958)
- Vollrath H. J. (1977) The Understanding of similarity and shape in clas- sifying tasks; *Educational Studies in Mathematics*, Vo.8 ,No.2.
- Ward, M. (1979) Mathematics and the 10 year-old-Schools Council Working Paper 61. Evans/Methuen for the Schools Council.
- Wirszup, I. (1976): Breakthroughs in the psychology of learning and teaching



geometry. In J. L. Martin & D.A. Bradbard (Ed.), *Space and geometry. papers from a research workshop* (pp.75-97). Athens: University of Georgia .Georgia Center for the Study of Learning and Teaching Mathematics. (ERIC Document Reproduction Service No.ED 132033).

Yerushalmy, M., Chazan, D. & Gordon, M. (1987) *Guided inquiry and technology: A year long study of children and teachers using the geometric support system: ECT final report*. Boston: Education Development Center.

Zykova, V.I. (1969a) *The psychology of sixth-grade pupils' mastery of geometric concepts*. In J. Kilpatrick and I. Wirszup (Eds.), *Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics (Vol.I)* (PP. 149-188). California: School Mathematics Study Group. Palo Alto, CA: School Mathematics Study Group.

Zykova, V. I. (1969b): *Operating with concepts when solving geometric problems*. In J. Kilpatrick and I. Wirszup (Eds.), *Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics (Vol. I)* (PP.93-148). Palo Alto, CA: school Mathematics study group.

