

「學習軌道」在數學教育研究的回顧與展望

林文川*

摘要

本文旨在探討「學習軌道」構念在數學教育研究的意義與內涵，以及探討學習軌道的形成方式與作用，描繪一個涵蓋教學、評量、課程發展和教師專業發展面向的概念架構，以提供後續有關學習軌道研究的參考。

我們藉由分析文獻回顧探討以下四項：一、說明學習軌道是由教學目標、學生數學認知發展和教學活動所構成學習路徑的意義和內涵；二、由教學實驗、理論概念分析和課程政策三個面向，探討學習軌道的形成來源和方式；三、以及指出學習軌道具有預期學生學習表現、發展課程與教學架構、評量學生能力和支持教師專業發展的功用；四、以圖形與面積概念的學習軌道做為範例，說明學習軌道在研究與實務的歷程與結果。

最後分別從：整合學生個人情境與課室文化、結合多元研究理論觀點與研究方法、發展特殊情境脈絡的教與學的局部理論、探討教師如何使用學習軌道以及應用於教師專業發展等五個面向，討論學習軌道在數學教育研究的啟示與應用。

本文認為結合實證研究和實務需求，以提升學生數學學習和確保教學品質是目前數學教育研究的趨勢。學習軌道即以實證研究的學生數學認知發展為主軸，發展符合適當課程教材，促進學生的數學學習發展，並進而成為學生數學表現的評量架構，和教師專業發展的工具。顯見學習軌道在數學教育研究的重要性及潛在研究價值。

關鍵詞：學習軌道、教學、學習、評量、數學課程、教師專業發展



DOI: 10.3966/199679772016063301006

投稿日期：2014年11月19日投稿，2015年6月24日修改完畢，2015年11月2日通過採用

* 林文川，新北市溪洲國小教師，E-mail: linwenchuan8@gmail.com

壹、前言

如何結合教學內容和教學活動來引導學生理解的學習特定數學概念，一直是數學教育研究的重要議題。1960至1970年代主要以教學設計的方式促進學生數學學習表現和保證教師的教學品質。不過，有些建構主義的學者認為教學設計和學生建構數學在本質上並不相同。過去的教學設計，有缺乏融入特定數學知識、教學策略和學生學習的問題，無法確保改善數學教學（Gravemeijer, 2004）。

近年數學教育研究注意過去教學設計取向的缺失，開始發展結合數學課程目標、教學任務和學生數學知識發展的理論模式，強調具有研究證據為基礎的教學設計。Simon（1995）所提出的假設性學習軌道（hypothetical learning trajectory）結合課程內容、教學活動和學生學習進程等三要素的構念，強調學生的數學學習機制，考量學生個別差異的課程發展，正可以提供教師以學生數學思考為主的教學活動，和理解學生數學思考的工具。因而具有改進數學教與學潛在作用的學習軌道，其相關的研究漸受到關注。例如研究期刊“*Mathematical Thinking and Learning*”在2004年六卷二期，就以專刊的方式介紹學習軌道在數學教育研究的方向和成果，以及 Clements 和 Sarama（2009）以專書發表學習軌道所發展的數學課程。近來更有相關研究將學習軌道延伸至教師學習教學領域。顯見，結合課程標準、課程、教學、評量和教師專業發展的學習軌道研究模式，逐漸成為數學教育研究的趨勢之一，其研究的議題將日益增加，且顯現教學實務應用的價值（Clements & Sarama, 2004; Shea & Duncan, 2013）。

然而，目前臺灣數學教育對於學習軌道的研究尚未受到更多關注。依此，本文研究目的在探討數學教育研究中學習軌道構念與其應用，並以下列問題為探討主軸：一、學習軌道具有何種意義與內涵？二、建構學習軌道的來源有哪些？三、學習軌道是如何形成的？四、學習軌道在數學教育研究的功能為何？

藉由回應上述問題，本文試圖提供瞭解整合數學課程內容、教師的教學活動和任務，與學習者認知發展的學習軌道的內涵，包括：其概念架構的組成要素、形成方式和作用；以及說明使用學習軌道做為課程發展、組織教學活動、評量學生數學能力，和教師專業發展的工具，對於

數學教育研究的啟示，以做為臺灣研究數學課室教學實務以及教師專業展的參考。

貳、學習軌道的意義與內涵

基本上，學習軌道是描繪學生學習機制的概念地圖（conceptual maps），用以說明學生數學理解的順序或本質，並以此發展數學課程來支持學生達成學校數學教學目標（Clements & Sarama, 2009）。其背後假定，數學教學應當以學生的數學思考為出發點，藉由設計適當的課程內容與教學活動來引導學生數學概念發展。

通常，學習軌道的研究者主要依據課程、教學和學習的理論，考量數學課室的特殊教學脈絡，來形成學習軌道架構與內容。然後在數學教學實踐歷程，以假設性學習軌道做為教學活動和確認學生數學理解的主要依據，以及實施教學的內容。最後再反思學習軌道的成效，以調整或修正原有的假設性學習軌道，繼而形成新興的（emergent）學習軌道（Weber & Lockwood, 2014）。因此，學習軌道大致是由假定性（hypothetical）的學生認知學習發展、特定教學目標的數學課程內容，以及意圖性的數學任務與教學活動等三元素所組成。我們依據學習軌道三個主要元素，分別說明學習軌道的意義與內涵。

一、教學目標

教學目標是學習軌道的核心基礎，扮演指導整個學習軌道的發展與實施的角色。在教學目標中，主要描述學生察覺特定數學關係的能力和數學思考的發展歷程，以及提供學生反思的各種數學經驗和數學活動的機會。以特定的教學目標來支持教師理解、詮釋和引導學生的數學學習。因此在擬定學習軌道的教學目標時，主要考量如何發展學生數學關鍵發展理解（key developmental understandings）的需求，來設定初階數學概念到進階概念的內容（conceptual advance），和組織教學活動的方向（Simon, 2006）。例如 Clements、Wilson 和 Sarama（2004）認為學生對於圖形的察覺（consciousness）能力與圖形合成與分解的操作學習相關。因此依據學生的形狀認知發展層次，設計圖形成的合成與分解

的活動，使用不同的圖形單位表徵形式，讓72位三至十二歲的學生從缺乏合成圖形的初始學習狀況，在試誤的過程中，依循學習軌道的教學進程，逐漸形成從圖形特徵來合成圖形的能力。

二、數學任務與教學活動

數學任務或教學活動具有引出和發展學生數學理解的功能，進而決定學生的數學學習機會與品質。在設計學習軌道的數學任務與教學活動時，主要以特定理論、實證研究或局部教學理論（local instruction theories）為發展基礎，以學生認知發展層次作為安排教學順序的依據，將各種不同表徵形式融入教學設計，最後在特定教學脈絡下，評估和修正數學任務或教學活動的效用（Lesh & Yoon, 2004; Simon & Tzur, 2004）。例如 Nickerson 和 Whitacre（2010）就以學生的數感（number sense）認知發展理論，以及強調建構過程的課室學習社群的實踐規範（norms and practices of classroom community）理論來設計數學任務和教學活動，做為組成假設性的學習軌道的內容。以這些教學活動提供學生發展彈性數感的解題策略與能力，如學生能使用結合律將「 25×48 」轉化成「 100×12 」。

簡言之，在設計學習軌道的數學任務與教學活動，主要考量以下五個因素：（一）學生在特定數學概念的發展層次；（二）教師表徵數學概念的相關理論、形式與策略；（三）選擇數學任務和教學活動的內容；（四）安排數學任務和教學活動的順序；（五）評估數學任務、教學活動與學生認知發展的互動關係的效用。

三、學生認知發展理論

學習軌道主要關注是學生的認知發展。因此，藉由局部學習理論（local learning theory）說明學生初始的數學概念，發展至教學目標所預定的進階數學概念的認知發展歷程，做為設定特定教學目標和組織數學活動與數學任務的主要依據之一。而學生認知發展的局部理論，主要由以下三項所組成：（一）學生的初始概念和運思的模式；（二）在初始概念和運思模式下，學生與數學活動互動所產生可觀察到的數學

學習表現的改變；（三）學生和數學活動之間互動關係的改變（Steffe, 2004）。例如 Battista（2004）從有關面積和體積測量的精熟層次，設計出引導學生從初始的非正式測量推理，發展為正式的數學概念的教學架構，和確認學生從非正式測量推理至正式數學概念的發展歷程。Mooney（2002）從已有的學生統計思考的認知理論，發展出有關描述、組織、簡化、呈現、分析和詮釋資料的架構和教學活動，提供給六至八年級學生進行統計思考的學習，並以訪談的方式來理解學生統計思考的認知發展歷程，以做為檢視學生統計思考發展的理論架構。

綜上所述，我們認為，學習軌道包含課程標準與能力指標、課程教材、學生數學思維歷程、教學活動、評量工具以及教師專業發展等多重維度的實踐取向概念架構。其重要核心主張是整合教師、學生與課程之間的互動關聯，以全面理解（holistic）的方式來探究課室數學教學歷程裡，學生在數學認知發展的不同層次發展，以及教學順序的組織和課程教材的選用等不同面向在課室教學實務的交互作用。

藉由各種學習軌道不斷的交互參照、比對，而形成一個結合特定數學知識與學生數學概念的教與學架構，用以發展課程教材，支持教師教學，促進學生學習，檢視學生學習表現，和支援教師的專業發展的工具。在發展學習軌道時，以學生思考為中心，結合特定數學教學目標、數學任務與活動發展學習軌道的內容。在教學實務中，教師可以使用學習軌道做為工具，來實踐特定的數學教學目標，修正與調整教學順序，檢視學生學習表現，和反思自我教學。

參、學習軌道的形成來源與方式

Clements 和 Sarama（2004: 82）將學習軌道的形成分成三個階段，第一階段，是為了在課室日常教學實施所需的數學任務所形成的。通常是由先前教過的數學任務所決定。第二階段是內在循環慎思歷程的教學實驗。而慎思的內容是組成課室教學的重要元素，包括特定教學目標、教學任務、教師角色和課室文化脈絡等對象，以形成意圖的學習軌道。第三階段是結合理論的慎思分析和實證資料，來建構適合特定教學脈絡和實踐教學的最適當教學活動順序。

本文以 Clements 和 Sarama（2004）的分類階段為基礎，分析有關

學習軌道的相關研究內容後，歸納學習軌道主要是由教學實驗，理論概念分析，或是課程政策等三類來源所形成，以下分別說明之。

一、教學實驗

建構學習軌道的第一步是形成新興的學習軌道。通常，新興學習軌道的來源主要由一個或是多個教學實驗所構成。而主要有三類教學實驗來產生新興學習軌道的架構與內涵。其一，設定特定的教學目標，組織數學內容或數學任務，而形成學習軌道的內涵。其二，探討教師安排數學任務和教學活動時，課程資源與教學策略的應用。其三，從分析學生思考方式與表現做為調整教學，與評量學生學習成就的依據。

（一）特定的教學目標的設定和數學內容與任務的組織

特定的教學目標和數學內容與任務是整個學習軌道的基本核心，是學生學習數學的主要來源，也是形成學習軌道的主要來源。大部分教學實驗會以教學目標和數學內容和任務為主要考量對象。探討在特定教學目標設定下，不同的數學任務的特徵（task features）和認知要求（cognitive demands），是如何影響學生的數學學習（Stein, Grover, & Henningsen, 1996）。

例如 Lannin（2005）在進行課室數學教學實驗時，事先預定教學目標，設計代數推理的教學活動順序，形成增進學生證成和一般化能力的學習軌道。黃幸美（2009）則整合二維空間的幾何和面積概念，形成一個教學單元，做為教學實驗的內容，以檢視結合二維空間幾何和面積概念的單元教學設計是否更適合學生的幾何和面積概念的發展。

（二）課程資源與教師的教學策略

課程資源主要包括課程教材和教學的情境脈絡，是學生學習和教學活動的來源。在課程資源的研究上，主要關注課程教材和情境脈絡在教師單元教學計畫（lesson planning）歷程中，是如何影響學生的學習、教師的教學和課室環境之間的互動關係。例如，Land 和 Drake（2014）以不同數學課程內容所設計的學習軌道，探討在教師與學生互動的歷程

中，課程資源的型態對於學生學習特定數學概念的影響。或是檢視以研究為基礎的課程教材（research-based instructional materials）是否能忠實實施於數學課室教學，以及對於數學課室環境和教學的影響（Clements & Sarama, 2008）。Amador 和 Lamberg（2013）分析在單元教學計畫決定和實施學習軌道時，情境脈絡如何支持或限制教師實施學習軌道的成效。

教師的教學策略使用是實施學習軌道的重要展現。有關教學策略的教學實驗，主要探討在學習軌道的教學實踐中，教師所使用的教學策略如何影響學生學習表現。例如，以學生數學反應為全班討論內容的教學模式，教師使用以下教學策略：1. 預期（anticipating）學生對於數學任務的反應，2. 監控（monitoring）學生在探索數學任務的反應，3. 選擇（selecting）特定的學生呈現他們的數學想法與解題策略，4. 有目的的排序（sequencing）學生的反應，和5. 連結（making connections）學生在重要數學想法的反應，來促進學生進階的數學學習、解決數學問題的表現和形成班級討論的文化（Stein, Engle, Smith, & Hughes, 2008）。

（三）學生數學學習表現與思考方式

學生數學學習表現的教學實驗研究主要集中在學生數學概念和解題策略等數學內容的理解方式（ways of understanding），以及有關數學思考方式（ways of thinking）的發展。以學生數學學習表現和思考方式做為設定學習軌道的教學目標的參考，形成教學活動和數學任務的依據，和詮釋、評量學生未來數學學習表現的基礎（Lobato, Hohensee, Rhodehamel, & Diamond, 2012）。

例如 Hohensee（2014）設計特定的二次函數教學單元來檢視學生數學推理（mathematical reasoning）和數學知識的關連，以檢視學生對同一數學任務的推理表現。其研究發現，當學生在學習新的數學概念，其推理方式受到教學單元的影響，而這些推理方式又會影響過去已經學過的數學知識。

McGatha、Cobb 和 McClain（2002）分析學生在特定數學單元（統計資料的分析）的數學任務其初始統計理解（initial statistical understanding）表現中，區別出學生從加法性推理和乘法性推理的思考方式的差異。Lannin（2005）設計增加學生深化證成和一般化的學習軌

道，探討在代數推理教學歷程，學生是如何證成（justification）他們所創造的一般化（generalizations），以及他們的證成方式如何支持或限制一般化的發展。

關於學生的學習表現和檢視學生數學概念與解題策略發展，主要設計數學教學活動順序，然後分析學生在參與數學任務的學習活動中，其數學概念的發展，以及他們的解題策略的表現。例如陳嘉皇（2005）以學習軌道發展面積概念課程與設計教學來檢視在不同階段的數學概念教與學中，學生所表現出不同的心智運作策略與功能。Gravemeijer（1999）設計一個100以內加減的教學活動順序的新興模式，作為分析學生發展彈性的心算策略和正式數學概念的發展歷程。

在評量學生數學學習表現上，如 Hackenberg（2007）經由教學實驗檢視一位學生的乘法性結構和假分數概念的建構關係。從學生乘法性結構的單位量的層次概念說明關於學生假分數概念建構的假定，再以此結果做為對於學生分數概念假定的修改依據。或是 Izsak（2005）綜合討論學生如何結合個人先備知識、外在表徵和解題策略的教學實驗，做為發展矩形面積和乘法推理兩個特定數學概念的學習軌道的基礎。

綜合上述，教學實驗設計主要以認知發展觀點分析學生的數學學習。在學習軌道的課程與教學的發展歷程中，首先，以學生的認知發展為主軸，設定數學課程中特定概念的教學目標。其二，設計符合學生學習需求的數學任務以及教學活動。其三，建構適當的情境脈絡，以促使學生在參與教學活動中的學習能夠獲得學習與發展的機會。

換言之，考量數學課程目標、教學活動以及學生學習此三要素之間的互動關係，並關注情境脈絡對於學習軌道的影響，是教學實驗發展學習軌道的重要來源。不過關於學習軌道的教學實驗仍有一些問題，有待進一步探討。例如以教學情境脈絡來分析學習軌道的在教學實務的效果，並未受到重視。教師發展學習軌道是解決特定教學實務問題的必要能力。但是，以教師為研究對象，探討教師發展、教師如何連結學生數學認知發展和課程目標來設計學習軌道的數學任務，也沒有受到更多的關注。

另外，在一個設計學習軌道時，如何整合數學重要概念、提供多少數量的教學活動，和需要哪些學生的多元解題策略，目前也沒有相關的研究。或許以多重個案對比和對照教學實驗，重覆檢視一個學習軌道的

模式對於不同學生或課室教學的實施成效，是提供學習軌道課程與教學設計參考的可能方式。

二、理論概念分析

除了以教學實驗做為學習軌道的來源外，有些學習軌道是藉由結合多個理論架構建構而成的。在形成學習軌道的歷程中，以理論概念的分析來理解學生學習特定數學能力的認知發展，和探討數學課程教材與教學模式等做為形成學習軌道的來源。例如 Whitenack 和 Knipping（2002）整合論證理論和數學活動的發展層次理論，探討學生論證能力的發展歷程來發展學習軌道。Polaki（2002）以認知發展模式來引導教學活動的設計，做為分析在不同的機率教學活動中，學生機率思考的發展。

Eriksson（2008, 2011）結合激進建構主義的知識論和多重臨床晤談的方法論，以學生為中心，結合學生認知發展層次的教學方式，做為引導學生算術概念發展，來探究學生的心智結構和行為模式之間的關聯，以形成有關學生算術概念的學習軌道。Zandieh 和 Rasmussen（2010）結合真實數學的教學設計理論與概念定義、意象的理論，設計出具有真實情境意義的數學活動的架構，形成一個可以理解學生從非正式的推論至正式推論的學習軌道。

林碧珍（2010）以 Lamon 的比與比值的語意結構分類，評析影響學生學習比值的重要因素，和分析教科書的架構，提出比和比值的初始概念的替代性教學設計，做為發展有關比和比值的學習軌道的參考。Barrett 等人（2012）結合內在認知能力、外在資源、心智內的經驗，和個體的行動等理論的互動關係，設計有關學習精熟層次的長度測量的學習軌道，做為預期學生的學習表現，和設計教學活動的工具。

從上述的研究來看，以各種不同理論做為建構學習軌道的來源，企圖結合理論和實務，來建構具有實務和生產性（productive）的學習軌道，再利用學習軌道做為預測學生學習表現，改善評量學習學習成就工具，和課程發展的參考基礎。

三、課程政策

有些學習軌道的形成來源是來自課程政策，或是呼應數學課程改革中，要求新增加的數學概念。例如以官方公布的課程綱要做為設計學習軌道的主要依據來設計學習軌道的內容和架構，以連結學生數學學習、課程綱要指標和課程教材之間的關聯（Confrey, Maloney, & Corley, 2014）。

另外一些數學課程政策認為應當新增加或補充的數學知識，例如統計與機率，需要被設計成教學活動和數學任務，以提供教學實務上的需求。例如 Polaki（2002）設計兩種不同版本的機率課程內容，分析在不同教學內容的教學實驗，學生的機率思維（probabilistic thinking）的發展特徵和概念結構，以理解機率課程內容與學生機率思維的關聯，形成一個回應課程政策要求的學習軌道。

然而依照課程綱要指標所發展的學習軌道是否符合課程政策制定者所預期的課程理念，仍是一個問題。再者，以課程政策作為學習軌道的發展依據，需要面對多元的數學教學脈絡和學生數學能力差異等問題的挑戰。因此以課程政策做為學習軌道設計來源，如何將課程綱要的目標轉化為符合學生數學學習的學習軌道，以及如何確認學習軌道的設計是否符合課程綱要的要求等，此一由正式課程轉化為意圖課程的過程所可能遭遇的挑戰，仍舊需要更多研究來解決這些問題。

而從建構學習軌道的來源來看，我們大致可以將學習軌道的形成方式分成兩類。其一，由理論概念分析，或依照課程政策，做為選擇學習軌道的數學內容、設計教學活動和學生學習發展的依據。這種由正式課程轉化為意圖課程的過程，是「由上而下」的發展學習軌道方式。其二，從教學實務層面，「由下而上」的發展方式，藉由不斷地紮根於一些特定數學單元或概念教學實驗，重複評量學生的學習表現，和檢視教學活動效果的實證資料來建構學習軌道的理論基礎和效用的歷程（Duschl, Maeng, & Sezen, 2011）。

雖然我們以教學實驗、理論概念分析和課程政策來歸納學習軌道的來源，指出「由上而下」和「由下而上」兩類的形成方式。但是，大致來說，在形成學習軌道時，研究人員常藉由：（一）分析學生思考模式，和建構學生在學習軌道的理解方法；（二）分析數學內容的概念，

設計支持學生數學學習的教學活動與數學任務；（三）從學生在參與教學活動與數學任務中，洞察他們數學概念的改變等方式來形成學習軌道。因此單一研究的設計和研究歷程常常是整合教學實驗、理論概念分析或課程政策其中二個以上的來源，以探討數學概念結構的特徵、學生的認知發展模式，和教學實驗課程與教學活動的效用（林碧珍，2010）。

換言之，數學教學實踐是相當複雜，在學習軌道的設計研究上，通常需要整合課程、教師和學生這三個面向之間的互動關係。至於「由上而下」還是「由下而上」的形成方式可以發展出適合教學實務，或提供學生更多學習機會的學習軌道內涵，目前仍未有定論，還需要以各種的研究方式檢視不同形成方式的學習軌道，其效用有何差異。

雖然學習軌道有教學實驗、理論概念分析和課程政策等不同來源，其形成的方式卻有兩個共同的出發點：第一，連結數學學習的假設，以說明學生數學學習的實證資料。第二，建構適合情境的數學任務和活動，以提供學生數學學習機會（Weber & Lockwood, 2014）。從上述二個共同點，Confrey 等人（2014）就提出，結合以下重覆疊迭（iterative）的六個步驟，做為形成一個結合課程政策、課程教材和實證研究的學習軌道的方式：第一，分析課程政策和理論概念做為學習軌道的基礎。第二，發展學習軌道的架構。第三，具體說明學習軌道架構中所依據實證研究的結果。第四，發展學習軌道的課程教材和教學活動。第五，分析學習軌道的實施結果。第六，修正學習軌道的架構與內容，做為另一個新興學習軌道的基礎。

從學習軌道來源所形成學習軌道的共同點，和 Confrey 等人（2014）提出的建構學習軌道步驟，我們可看到包含教學活動、數學任務、學生認知發展、教師教學策略和課室教學環境等元素之間的交互作用，以及形成學習軌道可以融合的方式，這兩個面向在發展學習軌道的重要性。不過如何詳細充實每步驟的內涵，還需要進一步的研究提供充足的實證資料與說明。

肆、學習軌道的功能

學習軌道所呈現的課程內容目標，學生學習特定數學概念的認知發展層次，以及數學任務與教學活動的安排，是教師在課室數學教學實踐的重要來源。例如，學習軌道呈現的數學概念發展層次架構，描繪的學生數學概念發展和推理方式，可以做為課程發展者和教師課程設計的參考，也可以做為教師反思與討論教學的依據，或是檢視學生數學概念發展的評量的架構。（Nickerson & Whitacre, 2010）。

從上可知，學習軌道具有預期學生學習發展，發展數學課程與教學內容，評量學生數學能力表現，以及支持教師的專業發展等功能，以下分別說明。

一、預期學生數學學習發展參考

在學習軌道的設計初始，即是以實證研究做為依據來預期學生的學習起點，和發展學生接續的數學概念。因為不同學習軌道所使用的局部學習理論，已經過實證研究的檢視，具有預期學生學習的功能。例如陳嘉皇（2005）以幾何理論和學生認知發展的實證研究做為發展學習軌道的基礎，再以學習軌道做為預期學生的圖形與面積概念的表現，進而設計出適合學生學習的教學目標和教學活動，從而歸納學生解決面積問題的策略。Wilson（2009）的研究也指出，教師在教學時使用學習軌道，能確認學生下一階段需要特別學習哪些數學概念。可見經過實證的學習軌道可以發揮事先預期學生學習數學概念表現的功用。

二、發展課程與教學的架構

結合課程教學與學生認知發展的學習軌道，經過理論分析或教學實驗後，可以做為發展新興課程內容的架構。研究人員或教師可以從已存在的學習軌道為基礎，做為重新發展新興學習軌道來設定數學教學目標，組織特定數學概念的架構。例如，林碧珍（2010）從影響學生學習比和比例的因素，分析教科書中比和比例之數學內容的組織架構，結合教學理論與學生認知發展，設計出一個比和比例初始概念的替代性教學

序列。顯然，學習軌道所形成課程與教學的架構，在課程與教學的設計上起著參考的作用。

三、評量學生能力的工具

學習軌道提供分析學生數學的先備知識、解決問題的策略和其它相關教與學的資訊，具有診斷（diagnosis）和修正（remediation）學生數學學習的作用（Sztajn, Confrey, Wilson, & Edgington, 2012）。例如，Battista（2004）以認知理論和測量的相關研究，發展出評量學生面積與體積測量的數學概念的發展與精熟的程度工具。其研究結果指出，特定數學概念的學習軌道除了提供教師做為檢視學生數學學習表現外，也可以做為大尺度的評量發展工具，和提供協助學生不同學習發展的輔助架構。

同時，學習軌道的診斷和修正的作用也是診斷性評量（diagnostic assessment）、形成性評量（formative assessment）的重要核心。將學習軌道的架構納入診斷性評量和形成性評量之中，教師更能全面地理解學生的數學概念發展歷程。因此，在學習軌道的支持下，有助於教師在教學過程中，可以檢視學生當下的數學能力，以做為調整教學內容和步驟，隨時回應學生的學習需求，回饋學生學習表現，以及修正學生的學習錯誤等教學決定的參考，進而做出引導學生數學學習的適當教學策略。

四、支持教師專業發展的基礎

教師需要確認學生的認知發展歷程，知道和掌握學生各種不同的數學學習方式，以及設計適合學生數學學習的教學活動，和難易適當的數學任務，用以提供學生數學學習的機會。例如，教師獲得有關學生如何解決不同加減文字題策略的知識時，他們更願意傾聽和討論學生不同的解題策略（Carpenter, Fennema, Peterson, Chiang, & Loef, 1989）。顯見，當教師獲得有關學生數學思考和學習的知識，對他們的數學教學是有影響的。因此職前或在職教師需要不斷獲得有關教學實踐以及其它教學模式等專業知識和工具，以做為專業發展的基礎。

而學習軌道除了可以提供教師發展學生數學思考的模式外，還可以讓他們再建構自己對於數學課程和學生數學思考的理解，正可以支持教師專業發展的基礎（Wilson, Mojica, & Confrey, 2013）。Wilson（2009）就指出，在特定學習軌道的支持下，教師可以依據學習軌道所提供的理論架構來選擇數學任務、分析學生數學學習表現，將學生的數學思考納入教學決定的考量因素；而在課室教學歷程中，決定如何與學生互動，以及回饋學生學習表現，從而發展出教師的專業能力。McClain（2003）的研究指出，運用學生學習位值概念和多位數的加減運算的學習軌道為教師專業發展的工具，能夠協助職前教師獲得有關位值概念和多位數加減運算的教學知識。

綜上所述，依據教學實驗、理論概念分析或課程政策等來源所發展新興或是成熟的學習軌道，具有高度的可信性（high degree of plausibility）和有用的可預測性（predictive useful）教學實踐（pedagogical practice）架構。此教學實踐架構包含預期（anticipating）學生的學習表現、監控（monitoring）學生的學習發展、選擇（selecting）特定的數學內容、安排（sequencing）數學任務，以及連結（connecting）教與學歷程等多重功能（Stein et al., 2008）。

因此我們可以將學習軌道應用於：（一）模式化學生的數學學習歷程；（二）落實學生學習中心的學習環境；（三）讓教師組織學生的數學討論，以促進學生數學概念的發展；（四）成為教師思考數學教學的架構，以選擇、組織教學活動和數學任務；（五）做為評量學生數學能力的工具；以及（六）使用在教師專業成長的規劃基礎等數學教育領域（Wilmot, Schoenfeld, Wilson, Champney, & Zahner, 2011）。例如 Barrett 等人（2012）就以二、三年級的學生在線性測量（linear measurement）單元的心像運思為基礎，整合學生的認知發展和教學進程，來建構學生在測量單元的相關單元的學習內容，進而模式化學生的學習歷程，落實以學生學習中心的教學策略，和形成評量學生學習成果的診斷工具。

伍、學習軌道的建置與應用示例

依據學習軌道的意義與內涵在教學實踐的功能，我們以一個學習軌道的創建、實施以及修正的示例，說明學習軌道的實際發展與應用。

具體呈現在使用學習軌道時，教師設定教學目標、選擇教學任務，和預期學生學習反應方式的梗概。因為陳嘉皇（2005，2008）的學習軌道研究指出學生在學習軌道的平台，可以達成教學目標的學習表現。而且在學習軌道的教與學歷程，可以獲得有關學生解題的策略與思考。從陳嘉皇（2005，2008）的範例，呈現整個學習軌道的發展、實施與反省的歷程。同時，顯示出學習軌道在數學教育研究與實務上的功用，以及未來可能的發展性。因此我們選用陳嘉皇（2005，2008）的研究佐證學習軌道在數學教育研究範例。

在發展學習軌道大致可分為創建、實施以及評量等三階段，可以計畫整學年或數小時的數學教學計畫。不過，基於文長的限制，我們僅以陳嘉皇（2005，2008）發展學童圖形與面積概念的學習軌道的實例，陳述創建階段，學習軌道的架構與內容的建置步驟與方式。再說明實施階段時，教師使用學習軌道的方式，以協助發展學生的學習。最後，陳述反省階段，教師如何評量學習軌道的合適性。

一、創建階段

在創建階段，陳嘉皇（2005，2008）首先分析學童圖形與面積概念的幾何思考理論、數學概念理解模式、空間概念模式，獲得學童圖形與面積概念需要圖形視覺比對與表徵、面積覆蓋排列、圖形重構與測量，以及公式理解應用等四個歷程。此分析結果形成支持後續教學活動的設計與數學任務的安排基礎。

其次依據學生圖形與面積的空間推理、測量、代數運用、以及表徵的能力發展指標，做為設計學習軌道內涵的參考。最後結合學童圖形與面積概念的發展歷程與能力發展指標，設計教學活動與數學任務，形成一個學生圖形與面積概念的學習軌道。

本文僅以「圖形重構與測量」部分為例，說明教學目標、學生認知以及教學活動的搭配情況，如表 1。雖然我們只就圖形的重構與測量來說明，但是整個學習軌道是由圖形視覺比對與表徵、面積覆蓋排列、圖形重構與測量，以及公式理解應用等四個教學歷程所組成的。

表1

圖形重構與測量的學習軌道創建示例

教學目標	學生認知發展	教學活動
透過三角形、平行四邊形、梯形與矩形圖形間之要素的比對與測量，配合分割移補策略，發現「等積異形」面積概念的保留。	一、面積空間推理能力 ● 分析二維幾何圖形的特質和特徵，發展幾何關係的數學論述。 ● 運用變換來分析數學的情境。 ● 使用視覺化、空間推理和幾何模式解決問題。 二、測量能力 ● 了解物體可測量的屬性。 ● 運用適當的測量策略，進行測量。	安排一個具有多邊形特徵圖形（如下圖一）的問題情境，要求學生利用分割、移補或其它策略，計算出該圖形的面積。



圖一

資料來源：整理自陳嘉皇（200：8-22）

二、實施階段

在實施階段，教師使用學習軌道大致有二個主要方式：使用學習軌道的活動和評量學生的學習。而此二個方式相互交織的實施於整個數學課室教學歷程中，以下分別說明之。

（一）提供學習軌道的活動

實施初期，教師依照創建階段所設計學習軌道的教學活動與數學任務，做為課室教學實施的內容。這些教學活動與數學任務以符合個別學生的學習差異為原則，藉由學習軌道的活動提供學生發展和強化多元的解題策略的機會。

在陳嘉皇（2005，2008）的圖形重構與測量的活動中，教師佈出多邊形特徵的圖形，以提供學生操作圖形分割、移補和重構等策略的學習機會；促使學生從圖形重構與測量的活動中，依據自己的認知程度、學習經驗來使用和熟練不同圖形重構的策略。

（二）評量學生的學習

實施學習軌道活動時，教師除了提供教學活動和數學任務外，同時，在與學生互動中，需要藉由觀察和蒐集學生的學習表現，作為調整教學活動，或修改數學任務的依據，以確認學習軌道的活動已達成教學目標。

陳嘉皇（2005，2008）認為，在實施學習軌道活動時，應該在當下的教學情境脈中，審視學生是否運用多元的策略、與其它同儕的學習軌道是否重疊、學生的學習層次為何，以及診斷學生的學習困難。例如，在圖形重構與測量活動中，教師應針對以下四點進行評量：1. 目前學生的圖形重構與測量學習表現是在哪一個學習層次？2. 學生在學習中是否發展多元的重構與解題策略？3. 學生對於圖形的重構與測量是否有學習困難或迷思概念？4. 學生的圖形重構與測量的學習軌道與其它同儕的是否有重疊之處？

三、反省階段

學習軌道的反省階段，主要分析與檢視創建階段學習軌道的教學目標、教學設計，與實施階段教學活動與數學任務的效果。教師可以就上述結果做為調整或修改學習軌道的依據，或應用修改的學習軌道版本於教學理論，形成新興的學習軌道。

因此教師在反省階段時，可以檢視以下四點，以反省學習軌道的意圖教學目標、教學活動和學生學習之間的聯結性、一致性。其一，奠基於實證研究、理論和學生認知發展的教學目標、設計的教學活動，在學習軌道教學中的運作情況為何？其二，在實施階段，學習軌道活動是否能夠協助學生發展數學概念和能力？其三，教師在實施學習軌道活動中是否能夠觀察或診斷學生的學習層次？其四，在整個學習軌道的實施中，教師能不能從學生的學習表現中，推論他們的學習狀況？

就陳嘉皇（2005，2008）圖形重構與測量的學習軌道的反省階段為例。其反省的內容，大致有以下四點：1. 學習軌道所提供的多邊形特徵圖形活動是否和原先的意圖教學目標、理論和學生認知發展的預期是一致的？2. 多邊形特徵圖形活動是否促使學生使用多元的重構和測量策略，以發展空間推理和測量能力？3. 從學生在多邊圖形的重構和測量的

策略裡，教師是否能夠觀察和診斷出學生的解題策略的類別和屬性，以及其背後的數學意義？4. 從學生在多邊圖形的重構和測量的策略中，教師是否能夠推論學生在圖形的空間推理和測量的能力是否有學習困難？

綜上所述，雖然我們從陳嘉皇（2005，2008）圖形重構與測量的學習軌道的創建、實施與反省三個面向，說明學習軌道從發展、實作，以及檢討的歷程，並試圖指出，創建階段的組合元素，實施階段的使用方式，以及反省階段的考量要點，以做為呈現學習軌道在數學教育的應用梗概。但是，必須說明的是，圖形重構與測量的學習軌道的示例，在創建、實施以及反省各階段的實質內涵、實踐的細節，仍舊需要更多的研究加以充實。另外在應用陳嘉皇的學習軌道示例於其它的特定情境與數學單元時，仍需在創建、實施與反省等階段做出適當的調整，以符合特定情境脈絡、特定單元數學課程理論與學生的認知發展的要求。

陸、結論

我們依學習軌道的意義與內涵、學習軌道的形成與來源，以及學習軌道的應用等三個面向，說明本文的結論。

一、學習軌道的意義與內涵

有別於其它的學科內容取向的課程發展模式，學習軌道強調結合學生數學認知發展、特定的教學目標、有意圖的教學活動與任務，以形成符合外在情境脈絡需求的教與學的架構。而此教與學的架構成為從學生的認知發展的理論分析、蒐集教學活動與任務解決的學生表現等可觀察的資料，以及由教師來詮釋和推論整個學習軌道在課室教學實踐的效果。從學習軌道的意義及內涵而言，它呼應在教學研究，應當整合課程、教師、學生和環境等四個課程與教學面向的要求。

換言之，數學教育研究期望以「學習軌道」的構念來架接理論與實務。從創建、實施和反思學習軌道的歷程中，藉由設計課程、調整教學來符合學生的認知需求，達成教學目標，形成一個具有實證研究且符合教學實踐的架構。

二、學習軌道的形成與來源

總的來說，學習軌道主要有「由上而下」和「由下而上」兩種形成方式。而其形成來源包括：關於課程、學生學習、教師教學以及教學情境脈絡等理論，教育當局所制定的種種課程政策（例如，課程的能力指標），以及從教師的教學經驗與教學實驗等三個來源。簡言之，學習軌道的來源和形成方式構成整個學習軌道的內容、運作機制和其功用。

三、學習軌道的應用

雖然學習軌道是以理解學生認知發展，提升學生數學學習表現為出發點，來發展課室的數學教學的活動與任務，和做為引導學生達成教學目標的假想歷程。但是，學習軌道在整個學習軌道的建構、實施與反省階段中，卻也發展出具有理解學生學習的評量作用，設計與發展課程教學的理論的建構與修正的潛能，以及做為教師反思理論與教學實務的功能。因而，學習軌道的相關研究開始將之應用於形成學生數學學習的評量架構、數學課程與教學的設計與發展的參考，以及提供教師專業發展方案的課程內容，和做為教師反思的對象。

總之，學習軌道從理論和教學實務的全面觀點來整合數學教育教與學的研究議題。藉由設計教學任務、描繪師生的互動，和檢視學生的學習表現，做為提供審視學生的學習機會、教師教學品質的問題，以及可能解決教與學歷程問題的教與學架構。而且，可以進一步的將學習軌道應用於教師專業發展方案，成為教師學習教學和理解學生學習的工具。

柒、建議

綜合學習軌道的文獻回顧與分析，我們發現，學習軌道的相關研究在國外的數學教育逐漸受到重視，也從學習軌道的相關研究產生出數學教學的模式與理論。顯見學習軌道構念在未來的數學教育研究是有發展性和重要性的。然而，反觀臺灣數學教育領域，對於「學習軌道」的研究議題，似乎並未受到關注。

因此，我們從學生學習、課程發展與學生的評量、教學活動的設

計與實施，學習軌道的評量和教師專業的應用等面向，指出學習軌道在臺灣數學教育研究未來可行的研究方向，和需要關注的研究議題，做為「學習軌道」在臺灣數學教育本土化發展的建議。

一、學生學習：學生的認知發展與學習軌道的搭配

如何引導學生學習數學是整個學習軌道的關鍵核心，因此關於學生的認知發展與特定數學概念的學習軌道之間要如何的搭配，仍是未來研究的重要議題。例如，我們如何藉由學習軌道來引導學生從非正式的數學逐步發展為正式數學知識，和處理有關學生的另類數學想法或迷思概念。以及在學習軌道的支持下，學生有關特定數學內容的思考方式與理解方式，如何發生改變。或是學習軌道的特定數學概念和學生的解題策略之間是否產生相互支持或限制。這些問題都是需要進一步的探討，才能更清楚的理解學習軌道與學生學習是否搭配，學生的數學學習是否能在學習軌道的支持下發生。

二、課程發展與學生的評量：發展一般化及特定教學脈絡的教與學的局部理論

在目前臺灣的學習軌道研究文獻裡，對於發展與實施學習軌道後的一般化教與學理論，以及將學習軌道應用於特殊教學脈絡，而進一步陳述特定教學脈絡的局部理論，甚少說明。然而，從學習軌道一般化後的局部教與學理論，可以整合數個學習軌道的共同特徵，藉由更全面檢視學習軌道的教學目標、課程發展與學生學習之間互動關係的假定性，引導新學習軌道的產生。

除了歸納學習軌道的一般化的局部教與學理論外，我們也需要進一步發展適合特定教學脈絡的教與學的局部理論。從探究不同教學脈絡的教與學的差異，展現學習軌道中學生學習的可能多元路徑，以及提供教師在教學實務中如何進行教學決定的論證（justification）和選用課程與教學內容的思考依據，做為深化學習軌道的一般化作用，提高學習軌道的教學效用（instructional validity）（Nickerson & Whitacre, 2010）。

換言之，從學習軌道和教與學的局部理論的整合，可以支持學習

軌道特殊情境脈絡和局部理論之間的雙向互補，更全面的慎思整個學習軌道的發展過程。藉由從一般化和特殊教學脈絡的局部教與學的理論整合，有助完備課室數學教學的教學模式。而課室數學教學的整合模式，又可以做為擬定和發展課程標準的依據與基礎，或是評量學生學習表現和教師教學品質的實證設計（evidence-based design）的工具。

不過目前整合學習軌道的教與學的一般化理論和發展局部理論的研究，以做為發展課程和評量學生學習的架構，尚屬於起步階段，是值得未來投入更多心力的領域。

三、教學活動的設計與實施：整合學生個人情境與課室文化的教與學

大部分的學習軌道研究主要集中於學生認知發展、數學課程內容和教學任務活動之間的互動，至於學生個人情境因素（context personalization）和課室文化等因素少有納入研究考量。但是將學習興趣納入數學任務的設計裡依據學生個人的學習興趣和經驗，設計和選擇差異化（personalization）的數學任務和教學活動，有助於數學程度較低的學生的數學學習（Walkington, Petrosino, & Sherman, 2013）。而在教學情境脈絡營造課室討論的文化，能支持學生發展智能的自主性（intellectual autonomy）和判斷解題策略有效性的能力（Nickerson & Whitacre, 2010）。顯見，學生個人情境因素和課室文化對於他們的數學學習表現是有影響。

但是，目學習軌道的研究主要對象與情境脈絡大都是國外的情境與文化，至於這些情境脈絡在臺灣本土實施時，需要做何調整與修正，有待進一步的研究。因此，在臺灣的學習軌道研究的重要焦點，應當關注學習軌道在連結個人（individual）與群體（collective）層次上。試圖整合學生個人情境因素和課室文化來協助學生學習新的數學概念、探究數學的能力，以及確認在特定情境脈絡下，學習軌道的有效性。

四、學習軌道的評量：結合多元理論觀點和研究方法的實證研究

由於教學實務的複雜性，學習軌道所使用的理論、所實施的特定脈

絡是否具有 consistency、有效性，在臺灣的數學教育研究中，目前尚未有提及的。

對於同一學習軌道在不同教學情境脈絡的實施，其適用性為何。這些問題需要結合不同理論觀點和研究方法，對學習軌道的不同層次和面向深入探討，以確認學習軌道在不同的對象、實施的情境脈絡的有效性和穩定性（Sztajn et al., 2012）。

藉由整合多元理論和研究方法的實證研究，以提供學生更多可能的學習路徑，和教師教學前的單元設計的參照。例如，從課程綱要轉化而成的學習軌道需要提供多少課程資源來協助教師，以協助他們在特定教學情境脈絡實施學習軌道，和調整教學。因而，未來需要進行更多結合不同理論觀點與研究取徑的實證研究，以確認學習軌道的有效性和豐富學習軌道的理論基礎和應用層面，是將學習軌道擴展於臺灣本土化的重要步驟。

五、教師專業發展的應用

目前，臺灣並未有研究和應用學習軌道於教師專業發展的案例。就文獻顯示，學習軌道在教師專業發展的應用大致有兩個方向：其一，探討教師的學習軌道的使用情形；其二，使用學習軌道於教師專業發展方案。

（一）教師的學習軌道的使用情形

大部分探討學習軌道主要關注學生數學知識的學習、課程教材的設計等議題，相對的，在學習軌道的研究中，教師被視為是消費者，對於教師如何使用學習軌道的專業知識，或是教師如何發展學習軌道等問題少有具體的研究成果（Land & Drake, 2014）。

然而教師以其專業知識來組織數學內容、安排數學任務和評量學生數學學習，是整個教與學的重要核心。所以教師如何運用知識和使用課程資源來發展學習軌道，以及教師在實施學習軌道的過程中，如何在師生互動過程，以提供學生數學概念發展的機會，和達成教學目標。這些問題都影響學習軌道的實施成效，也是整個學習軌道實施成敗與否的關鍵。因此，投入更多有關教師如何使用學習軌道的教學研究，是產生具

有教學實務導向的教學理論的重要研究步驟，也是一個新興且值得未來投入更多研究的方向。

（二）使用學習軌道於教師專業發展方案

雖然已有不少理論和教師教育方案做為教師專業發展之用，對於如何發展教師專業已有一定的貢獻。但是卻少有將學習軌道納入教師專業發展模式中。然而從Simon（1995）所提供的教學模式，反映出整合課程發展、教學歷程以及學生數學學習的學習軌道呈現數學教學實務的樣貌，對於支持教師專業知識的發展是有所助益。研究顯示，當教師理解學習軌道的意義與作用時，學習軌道能支持教師在選擇教材、安排教學活動和回應學生學習的專業知識的成長（Sztajn et al., 2012）。

不過，教師知識本身相當複雜。如何連結教師知識和學習軌道之間的關連，仍然需要全面深入的研究。再者，目前臺灣本土結合教師知識、情境脈絡因素以及學習軌道的相關研究，以提供師資培育人員設計讓教師學習和理解學習軌道的理論與架構的學習軌道課程，仍未受到重視。

因此結合教師知識、情境脈絡因素和學習軌道等三面向的研究本土化，對於深化和擴展臺灣數學的教學與學習理論具有潛在的研究價值，實是未來應當著力的研究方向。

參考文獻

- 林碧珍（2010）。比與比值初始概念的教學初探。**新竹教育大學教育學報**，27(1)，121-159。
- 【Lin, P.-J. (2010). The exploration of teaching initial concept of ratio. *Educational Journal of NHCUE*, 27(1), 121-159】
- 陳嘉皇（2005）。「學習軌道」理論之意涵與其在兒童圖形與面積概念發展上之探究與應用。**教育科學期刊**，5(2)，1-26。
- 【Chen, C.-H. (2005). Investigated and applied the “hypothetical learning trajectories” theories on children’s figure and area conception development. *Journal of Research in Education Sciences*, 5(2), 1-26.】
- 陳嘉皇（2008）。國小面積資訊教材學習軌道設計與教學成效探討。**高**

雄師大學報，25，103-124。

- 【Chen, C.-H. (2008). The study of the effects of learning trajectories designing and teaching experiment on elementary school students' area formulation conception developed. *Kaohsiung Normal University Journal: Sciences and Technology*, 25, 103-124.】
- 黃幸美（2009）。整合二維空間幾何與面積概念的課程與教學試驗。 *科學教育學刊*，17(6)，509-530。
- 【Huang, H.-M. (2009). An experiment of two-dimensional spatial geometry and area measurement concepts integrated curriculum and instruction. *Chinese Journal of Science Education*, 17(6), 509-530.】
- Amador, J., & Lamberg, T. (2013). Learning trajectories, lesson planning, affordances, and constraints in the design and enactment of mathematics teaching. *Mathematical Thinking and Learning*, 15, 146-170.
- Barrett, J. E., Sarama, J., Clements, D. H., Cullen, C., McCool, J., Witkowski-Rumsey, C., & Klanderma, D. (2012). Evaluating and improving a learning trajectory for linear measurement in elementary grades 2 and 3: A longitudinal study. *Mathematical Thinking and Learning*, 14, 28-54.
- Battista, M. T. (2004). Applying cognition-based assessment to elementary school students' development of understanding of area and volume measurement. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 185-204.
- Carpenter, T. P., Fennema, E., Peterson, P. L., Chiang, C., & Loef, M. (1989). Using knowledge of children's mathematics thinking in classroom teaching: An experimental study. *American Educational Research Journal*, 26, 499-531.
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 81-89.
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2008). Experimental evaluation of the effects of a research-based preschool mathematics curriculum. *American Educational Research Journal*, 45(2), 443-495.
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2009). *Learning teaching early mathematics: The learning trajectories approach*. New York, NY: Routledge.

- Clements, D. H., Wilson, D. C., & Sarama, J. (2004). Young Children's composition of geometric figures: A learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 163-184.
- Confrey, J., Maloney, A., & Corley, A. K. (2014). Learning trajectories: A framework for connecting standards with curriculum. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education*, 46(5), 719-733.
- Duschl, R., Maeng, S., & Sezen, A. (2011). Learning progressions and teaching sequences: A review and analysis. *Studies in Science*, 47(2), 123-182.
- Eriksson, G. (2008). Arithmetical thinking in children attending special schools for the intellectually disabled. *Journal of Mathematical Behavior*, 27, 1-10.
- Eriksson, G. (2011). Toward a student-centred process of teaching arithmetic. *Journal of Mathematical Behavior*, 30, 62-79.
- Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, 1(2), 155-177.
- Gravemeijer, K. (2004). Local instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 105-128.
- Hackenberg, A. J. (2007). Units coordination and the construction of improper fractions: A revision of the splitting hypothesis. *Journal of Mathematical Behavior*, 26, 27-47.
- Hohensee, C. (2014). Backward transfer: An investigation of the influence of quadratic functions instruction on students' prior ways of reasoning about linear functions. *Mathematical Thinking and Learning*, 16, 135-174.
- Izsak, A. (2005). Applying knowledge in pieces to learning rectangular area. *Journal of the Learning Sciences*, 14(3), 361-403.
- Land, T. J., & Drake, C. (2014). Enhancing and enacting curricular progression in elementary mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, 16, 109-134.

- Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(3), 231-258.
- Lesh, R., & Yoon, C. (2004). Evolving communities of mind-In which development involves Several interacting and simultaneously developing strands. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 205-226.
- Lobato, J., Hohensee, C., Rhodehamel, B., & Diamond, J. (2012). Using student reasoning to inform the development of conceptual learning goals: The case of quadratic functions. *Mathematical Thinking and Learning*, 14, 85-119.
- McClain, K. (2003). Supporting preservice teachers' understanding of place value and multidigit arithmetic. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(4), 281-306.
- McGatha, M., Cobb, P., & McClain, K. (2002). An analysis of students' initial statistical understanding: Developing a conjectured learning trajectory. *Journal of Mathematical Behavior*, 21, 339-355.
- Mooney, E. S. (2002). A framework for characterizing middle school students' statistical thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 4(1), 23-63.
- Nickerson, S., & Whitacre, I. (2010). A local instruction theory for the development of number sense. *Mathematical Thinking and Learning*, 12, 227-252.
- Polaki, M. V. (2002). Using instruction on identify key features of Basotho elementary students' growth in probabilistic thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 4(4), 285-313.
- Shea, N. A., & Duncan, R. G. (2013). From theory to data: The process of refining learning progressions. *Journal of the Learning Sciences*, 22, 7-32.
- Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114-145.

- Simon, M. A. (2006). Key developmental understandings in mathematics: A direction for investigating and establishing learning goals. *Mathematical Thinking and Learning*, 8(4), 359-371.
- Simon, M. A., & Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 91-104.
- Steffe, L. P. (2004). On the construction of learning trajectories of children: The case of commensurate fractions. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 129-162.
- Stein, M. K., Grover, B. W., & Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal*, 33(2), 455-488.
- Stein, M., Engle, R., Smith, M., & Hughes, E. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10, 313-340.
- Sztajn, P., Confrey, J., Wilson P. H., & Edgington, C. (2012). Learning trajectory based instruction: Toward a theory of teaching. *Educational researcher*, 41(5), 147-156.
- Walkington, C., Petrosino, A., & Sherman, M. (2013). Supporting algebraic reasoning through personalized story scenarios: How situational understanding mediates performance. *Mathematical Thinking and Learning*, 15, 89-120.
- Weber, E., & Lockwood, E. (2014). The duality between ways of thinking and ways of understanding: Implications for learning trajectories in mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior*, 35, 44-57.
- Whitenack, J. W., & Knipping, N. (2002). Argumentation, instructional design theory and students' mathematical learning: A case for coordinating interpretive lenses. *Journal of Mathematical Behavior*, 21, 441-457.
- Wilmot, D. B., Schoenfeld, A., Wilson, M., Champney, D., & Zahner, W.

- (2011). Validating a learning progression in mathematical functions for college readiness. *Mathematical Thinking and Learning*, 13(4), 259-291.
- Wilson, P. H. (2009). *Teachers' uses of a learning trajectory for equipartitioning* (Unpublished doctoral dissertation). North Carolina State University, Raleigh, NC.
- Wilson, P. H., Mojica, G. F., & Confrey, J. (2013). Learning trajectories in teacher education: Supporting teachers' understandings of students' mathematical thinking. *Journal of Mathematical Behavior*, 32, 103-121.
- Zandieh, M., & Rasmussen, C. (2010). Defining as a mathematical activity: A framework for characterizing progress from informal to more formal ways of reasoning. *Journal of Mathematical Behavior*, 29, 57-75.

Learning Trajectories in Mathematics Education Research: A Literature Review

Wen-Chuan Lin*

Abstract

The purpose of this study was to introduce the learning trajectory to mathematics education research. First, I briefly review the literature, thereby documenting that learning trajectories are learning structures composed of teaching goals, students' mathematical cognitive development, and teaching activities. Second, I explore the sources of the development of learning trajectories for 3 areas, namely teaching experiments, theoretical and conceptual analysis, and curriculum policy; in addition, the technique for constructing a learning trajectory is illustrated. Third, I demonstrate that there are 4 functions of learning trajectories: anticipating students' learning, developing curriculum and teaching, assessing students' mathematical ability, and supporting teachers' professional development. Fourth, I introduce an example of a learning trajectory to explain how to apply trajectories in practice.

Finally, I discuss the implications of learning trajectories in mathematics education research and offer directions for future research through the following 5 points: coordinating student context personalization, combining multiple theoretical perspectives and research methods, developing local theories of teaching and learning in specific contexts, inquiring into how teachers use learning trajectories, and applying learning trajectories to teachers' professional development.

In this article, I explain that mathematics education research integrates empirical research and the requirements of instructional practices to facilitate students' mathematical learning and to ensure teaching quality. The function of learning trajectories is to provide mathematical instruction to students by integrating the cognitive development of students, curriculum materials, and intended instructional goals. Learning trajectories are a crucial and effective tool for mathematics education research.

Keywords: learning trajectories, teaching, learning, assessment, mathematics curriculum, teacher professional development.



DOI: 10.3966/199679772016063301006

Received: November 19, 2014; Modified: June 24, 2015; Accepted: November 2, 2015

* Wen-Chuan Lin, Teacher, Xizhou Elementary School, New Taipei City, E-mail: linwenchuan8@gmail.com

